Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Lösungen zu Aufgabenblatt 4 (12. Mai 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Rationale projektive Ebene

a) Begründen Sie kurz, weshalb $\mathbb{QP}^2 = (\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$ eine projektive Ebene ist.

b) Geben Sie die Transformationsmatrix M an, die eine Drehung um den Ursprung um einen Winkel von 45° gegen den Uhrzeigersinn beschreibt.

c) Die Menge der rationalen Punkte soll jetzt mit einer gedrehten Version ihrer selbst kombiniert und das Ergebnis zu einer projektiven Ebene ergänzt werden. Das Ergebnis ist eine Teilstruktur des $\mathbb{RP}^2$, in dem auch die Operationen $\vee$ und $\wedge$ interpretiert werden.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &:= \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \cup \{M \cdot p \mid p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\} & \mathcal{L}_0 &:= \{a \vee b \mid a, b \in \mathcal{P}_0\} \\ \mathcal{P}_{i+1} &:= \{a \wedge b \mid a, b \in \mathcal{L}_i\} & \mathcal{L}_i &:= \{a \vee b \mid a, b \in \mathcal{P}_i\} \\ \mathcal{P} &:= \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i & \mathcal{L} &:= \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, ob schon nach endlich vielen Schritten ein Fixpunkt der Iteration erreicht wird, also ob es ein $i < \infty$ gibt, so dass $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{i+1}$ und $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i+1}$ gilt.

d) Zeigen Sie kurz, dass die eben konstruierten Punktemengen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ zusammen mit der auf diese Mengen Eingeschränkten Inzidenzrelation

$$\mathcal{I} := (\mathcal{P} \times \mathcal{L}) \cap \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$$

eine projektive Ebene bildet.

e) Versuchen Sie, diese Ebene als projektive Ebene über einem Zahlenkörper zu beschreiben. Wenn Sie einen geeigneten Körper finden, geben Sie diesen in einer typischen Schreibweise an.

f) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass in $\mathbb{RP}^2$ jede Kollineation eine projektive Abbildung ist. Finden Sie heraus, an welcher Stelle ein analoger Beweis für die hier konstruierte Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ scheitert.

g) Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage, dass in der oben konstruierten Ebene jede Kollineation eine projektive Transformation ist.

LÖSUNG:

a) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper, und über jedem Körper kann man eine projektive Ebene konstruieren.

Anschaulich kann man sich überlegen, dass die Operationen Schnittpunkt und Verbindungsgerade allein mit Kreuzprodukten und somit auf Koordinatenebene allein mit Multiplikationen und Subtraktionen berechnet werden können. Der Körper $\mathbb{Q}$ wird dabei nie verlassen.

b) Ein möglicher Repräsentant wäre

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit dieser Matrix führt also in den ersten beiden Koordinaten jeweils eine $\sqrt{2}$ ein, während die dritte Koordinate rational bleibt.

c) Kernpunkt dieser Teilaufgabe ist die Definition. Die Untersuchung der Endlichkeit ist von untergeordneter Bedeutung, soll hier aber dennoch besprochen werden.

Die Iteration endet nach endlich vielen Schritten. Den Beweis dafür kann man einfach führen, wenn man nicht versucht, das minimale i zu finden, ab dem die menge gesättigt ist, und indem man das Ergebnis von Aufgabe e) bereits ahnt.

Schon in der Ausgangslage finden sich auf der x-Achse alle Punkte der Form $(x, 0, 1)^T$ sowohl für $x \in \mathbb{Q}$ als auch für $x \in \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$. Mit einer von-Staudt-Konstruktion kann man diese Punkte addieren, um alle Punkte mit $x = a + \sqrt{2}b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ zu erhalten. Dabei werden nur endlich viele geometrische Grundoperationen benötigt. Spätestens mit einer Iterationstiefe, die der Zahl dieser Schritte entspricht, werden also alle benötigten Elemente einschließlich des Endergebnisses auch in den Mengen enthalten sein. Auf der y-Achse finden sich mit dem gleichen Argument auch alle Zahlen aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ als y-Koordinaten wieder. Aus Punkten auf den beiden Koordinatenachsen können alle endlichen Punkte in der Zeichenebene konstruiert werden, und auch das wieder in endlich vielen geometrischen Grundoperationen. Daraus ergeben sich dann auch alle erforderlichen Geradenrichtungen und somit alle Schnittpunkte auf der Ferngerade.

d) Die Existenz von Schnittpunkt und Verbindungsgerade ergeben sich aus der Konstruktion: wann immer zwei Geraden bzw. Punkte in einer Menge kombiniert werden können, wird die entsprechende Kombination spätestens im nächsten Iterationsschritt in die Mengen mit aufgenommen. Die Eindeutigkeit von Schnittpunkt und Verbindungsgerade sowie die Existenz von vier Punkten in allgemeiner Lage werden von $\mathbb{RP}^2$ geerbt.

e) Es ergibt sich die projektive Ebene $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\mathbb{P}^2$, wobei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist.

f) Der Beweis in der Vorlesung hatte Positivität definiert über Quadrate: eine Zahl x ist positiv, wenn es eine Zahl y gibt, so dass $y^2 = x$. Diese Charakterisierung scheitert bei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, da beispielsweise die Zahl $\sqrt{2}$ kein Quadrat von Zahlen aus diesem Körper ist.

g) Die Aussage ist falsch, da es einen nicht-trivialen Körperautomorphismus gibt:

$$\varphi : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

Das kann man leicht durch Ausrechnen beweisen:

$$\begin{aligned} \varphi(a + b\sqrt{2}) + \varphi(c + d\sqrt{2}) &= (a - b\sqrt{2}) + (c - d\sqrt{2}) = (a + c) - (b + d)\sqrt{2} = \varphi\big((a + c) + (b + d)\sqrt{2}\big) \\ \varphi(a + b\sqrt{2}) \cdot \varphi(c + d\sqrt{2}) &= (a - b\sqrt{2}) \cdot (c - d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = \varphi\big((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\big) \end{aligned}$$

Angewandt auf alle Koordinaten erhält dieser Automorphismus Kollineatitäten, lässt sich jedoch nicht als projektive Transformation beschreiben. Ersteres ergibt sich aus der Definition der Inzidenz über das verschwinden des Skalarprodukts, da diese Eigenschaft unter dem Automorphismus erhalten bleibt. Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, dass die Standard-Basis auf sich selbst abgebildet wird, obwohl die Abbildung nicht die Identität ist.

Aufgabe 2. Geometrisch berechenbare Operationen

Für drei Punkte A, B, C auf einer projektiven Geraden sei die Funktion h definiert durch

$$h(A, B; C) = D \quad \Leftrightarrow \quad (A, B; C, D) = -1$$

Die Funktion h errechnet also aus drei Punkten einen vierten, der in der beschriebenen Weise harmonisch zu diesen dreien liegt. Außerdem seien auf der Rechengerade die Punkte 0, 1 und ∞ ausgezeichnet sowie weitere Punkte x und y vorgegeben.

a) Ermitteln Sie, welche der folgenden Punkte auf der Rechengeraden sich durch Anwendung der Funktion h aus den vorgegebenen Punkten konstruieren lassen. Bei denen, bei denen diese Konstruktion funktioniert, geben Sie eine entsprechende Formel an. Bei denen, bei denen eine Konstruktion mit diesen Mitteln nicht möglich ist, begründen Sie diese Tatsache.

(1) $3 \cdot x$	(4) $x \cdot y$	(7) $\sqrt{x}$
(2) $x + y$	(5) $\frac{1}{x}$	(8) x^2
(3) $x - y$	(6) $\frac{x}{y}$	(9) e^x

Hinweis: Sie dürfen Rechenoperationen, die Sie bereits auf die Funktion h zurück geführt haben, als abkürzende Schreibweise verwenden, wenn Sie darauf aufbauende Operationen beschreiben. Es muss also nicht jeder einzelne Ausdruck tatsächlich allein durch geschachtelte h-Funktionen angegeben werden, solange Ihnen bewusst ist, dass eine solche Schreibweise prinzipiell möglich wäre.

b) Die Funktion h ist nicht definiert, falls zwei der drei Punkte A, B, C zusammenfallen. Untersuchen Sie, welche Ihrer eben angegebenen Formeln von diesem Fall betroffen sein können, und geben Sie Fallunterscheidungen an, die auch in diesen Sonderfällen die gewünschte Berechnung ermöglichen. Sie können davon ausgehen, dass die Punkte 0, 1 und ∞ paarweise verschieden sind.

c) Gegeben sei ein weiterer Punkt, von dem behauptet wird, er habe in der angegebenen projektiven Skala die Position $\sqrt{2}$. Können Sie diese Behauptung mit einer Inzidenzkonfiguration überprüfen? Falls nein, warum ist dies unmöglich? Falls ja, kann diese Inzidenzkonfiguration zur Konstruktion des Punktes $\sqrt{2}$ verwendet werden?

★d) Angenommen, h wäre nicht mehr über das Doppelverhältnis definiert, sondern sei eine beliebige Funktion, die auf Punkten der projektiven Geraden operiert. Dennoch seien Addition und Multiplikation mit ihrer Hilfe entsprechend definiert. Welche Eigenschaften muss h haben, damit die so definierte Addition und Multiplikation einen Körper beschreibt, also die Körperaxiome erfüllt?

<u>Lösung:</u>

a) Bis auf (7) und (9) sind alle Operationen durch Schachteln harmonischer Verhältnisse konstruierbar.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot x &= h(x, \infty; 0) \\
3 \cdot x &= h(2 \cdot x, \infty; x) = h(h(x, \infty; 0), \infty; x) && (1) \\
\frac{x+y}{2} &= h(x, y; \infty) \\
x + y = 2 \cdot \frac{x+y}{2} &= h(h(x, y; \infty), \infty; 0) && (2) \\
-y &= h(0, \infty; y) \\
x - y = x + (-y) &= h(h(x, h(0, \infty; y); \infty), \infty; 0) && (3) \\
x^2 &= h(-x, x; 1) = h(h(0, \infty; x), x; 1) && (8) \\
\frac{x}{2} &= h(0, x; \infty) \\
x \cdot y &= \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - (x^2+y^2)\right) = \frac{(x+y)^2 + (-(x^2+y^2))}{2} && (4) \\
&= h(\underbrace{h(\underbrace{h(0,\infty;\underbrace{h(h(x,y;\infty),\infty;0)}_{x+y})}_{-(x+y)},\underbrace{h(h(x,y;\infty),\infty;0)}_{x+y};1)}_{(x+y)^2},\underbrace{h(0,\infty;\underbrace{h(h(\underbrace{h(h(0,\infty;x),x;1)}_{x^2},\underbrace{h(h(0,\infty;y),y;1)}_{y^2};\infty),\infty;0)}_{x^2+y^2})}_{-(x^2+y^2)};\infty) \\
\frac{1}{x} &= h(-1, 1; x) = h(h(0, \infty; 1), 1; x) && (5) \\
\frac{x}{y} &= x \cdot \frac{1}{y} && (6)
\end{aligned}
$$

Mit Operationen (7) und (9) wäre es möglich, beispielsweise für $x = 2$ aus rein rationalen Eingaben ein irrationales Ergebnis zu errechnen. Da harmonische Konstruktionen auch über $\mathbb{QP}^2$ ausführbar sind, kann eine solche Konstruktion aus rationalen Eingaben nur wieder ein rationales Ergebnis errechnen. Daher sind diese beiden Operationen durch keine Inzidenzkonstruktionen nachzubilden.

b) Folgende Sonderbehandlungen gelten für endliche Eingaben x und y:

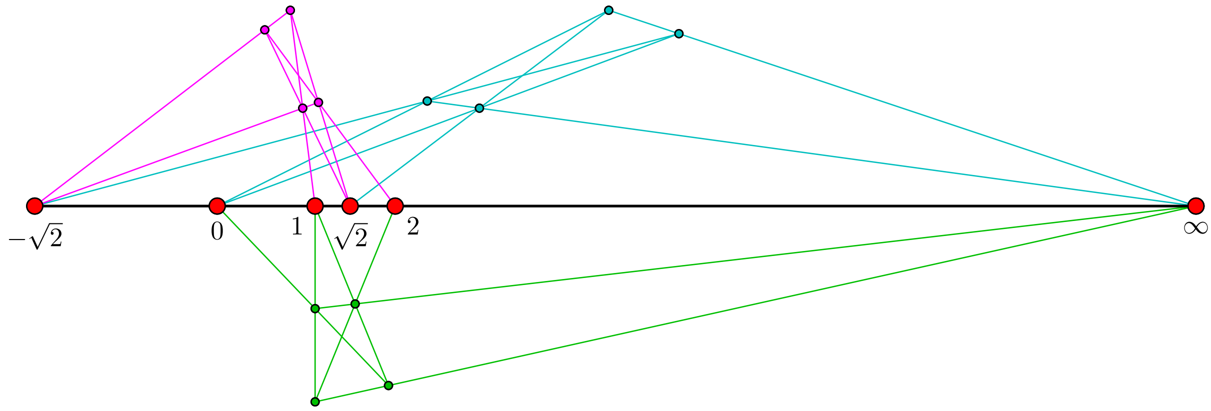
- Wenn $x = 0$ ist, ist $2 \cdot x = 0$ und $3 \cdot x$ ebenfalls 0.
- Wenn $x = y$ ist, ist $\frac{x+y}{2} = x = y$.
- Wenn $\frac{x+y}{2} = 0$ und somit $x = -y$ ist, dann ist $x + y = 0$.
- Wenn $y = 0$ ist, ist $-y = 0$ sowie $x - y = x$.
- Wenn $|x| = 1$ ist, ist $x^2 = 1$.
- Wenn $x = 0$ ist, ist $x^2 = 0$ und $\frac{x}{2} = 0$.
- Wenn $x = 1$ ist, ist $\frac{x}{1} = 1$.
- Für $x \cdot y$ sowie $\frac{x}{y}$ müssen in den Einzelschritten die eben aufgelisteten Sonderbehandlungen angewandt werden.

c) Die $\sqrt{2}$ kann nicht konstruiert werden, da man andernfalls ausgehend von rationalen Punkten einen irrationalen Punkt konstruieren könnte, was nach Aufgabe 18 a) unmöglich ist.

Hat man jedoch einen solchen Punkt gegeben, so kann man ihn quadrieren, um zu überprüfen, ob dieses Quadrat die 2 ist:

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{2} &= h(0, \infty; \sqrt{2}) \\
\left(\sqrt{2}\right)^2 &= h(-\sqrt{2}, \sqrt{2}; 1) \\
2 \cdot 1 &= h(1, \infty; 0)
\end{aligned}
$$

Wenn der Punkt $\left(\sqrt{2}\right)^2$ tatsächlich mit dem Punkt $2 \cdot 1$ zusammenfällt, so bezeichnet $\sqrt{2}$ eine Zahl, deren Quadrat 2 ist. Dafür gibt es über den reellen Zahlen zwei Möglichkeiten: $\pm\sqrt{2}$. Bis auf das Vorzeichen kann man also die Wurzel als solche erkennen. Wenn man die Wurzel als eine mehrdeutige Funktion auffasst, dann kann man die Eigenschaft, $\sqrt{2}$ zu sein, vollständig überprüfen.



d) Man kann einfach die Definitionen von Addition und Multiplikation nehmen und damit die Körperaxiome notieren. Das Ergebnis sind sehr implizite Formulierungen der entsprechenden Anforderungen an h. Diese expliziter aufzuschreiben gestaltet sich recht schwer. Ergebnisse in diese Richtung sind herzlich willkommen.

— ***Hausaufgaben*** —

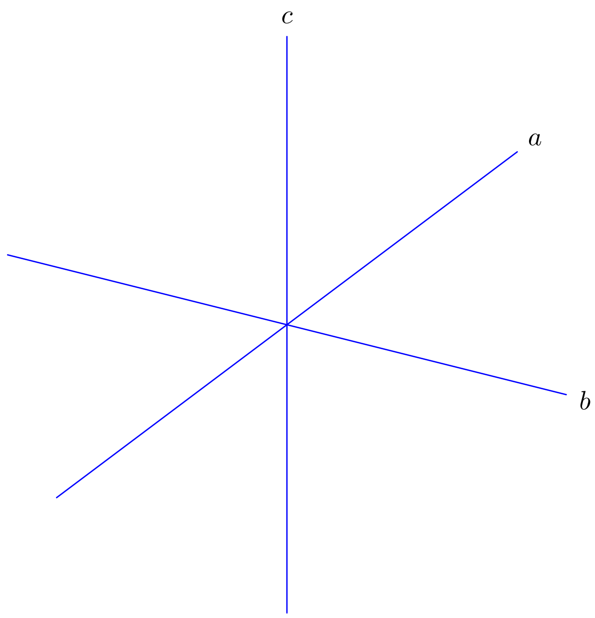
Aufgabe 3. Rechnen mit Geradensteigungen

Betrachtet man für Geraden in der reellen Ebene nur deren Steigungen, so bilden diese eine projektive Gerade: alle reellen Zahlen können als Steigungen vorkommen, und außerdem gibt es Geraden mit unendlicher Steigung.

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die zu gegebenen Punkten A, B, C den dazu harmonischen Punkt D konstruiert, so dass $(A, B; C, D) = -1$ ist. Geben Sie zu dieser Konstruktion auch eine schrittweise Konstruktionsbeschreibung.

b) Dualisieren Sie diese Konstruktionsbeschreibung.

c) Benutzen Sie die duale Konstruktion, um zu den folgenden Geraden $a, b; c$ die harmonische Gerade d zu konstruieren.



d) Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis der eben konstruierten vier harmonischen Geraden sich auch schreiben lässt als Bruch von Determinanten von homogenen Koordinaten der involvierten Geraden.

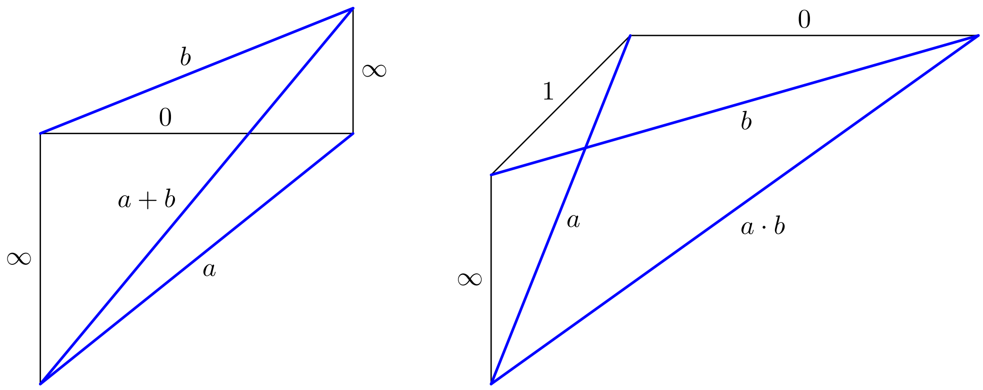
e) Betrachten Sie allgemein das Doppelverhältnis vier beliebiger Geraden durch einen gemeinsamen Punkt, das wie eben angegeben über Determinanten aus den homogenen Koordinaten der Geraden errechnet wird. Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte der Geraden mit der Geraden im Unendlichen das gleiche Doppelverhältnis haben.

f) Schneiden Sie in der Zeichnung zu Aufgabe c) die vier konkurrenten Geraden mit einer weiteren (endlichen) Geraden. Untersuchen Sie durch eine geeignete Konstruktion, ob die sich ergebenden Schnittpunkte in harmonischer Lage liegen.

g) Argumentieren Sie, warum man ein Doppelverhältnis von vier Geradensteigungen sinnvoll definieren kann, auch wenn diese Geraden nicht durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen.

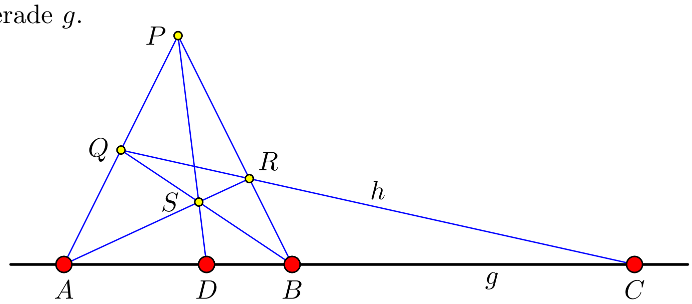
h) Geraden mit Steigungen 0, 1 und ∞ legen eine projektive Skala fest. Überprüfen Sie, dass sich mit dieser Skala Geradensteigungen direkt messen lassen, dass also die Steigung, wie sie der Koordinatenvektor vorgibt, mit der über Doppelverhältnisse berechneten Steigung übereinstimmt.

i) Beweisen Sie, dass die folgenden Konstruktionen tatsächlich verwendet werden können, um Geradensteigungen zu addieren und zu multiplizieren, so wie es die Beschriftung suggeriert. Sie dürfen auch affine oder euklidische Argumente verwenden.



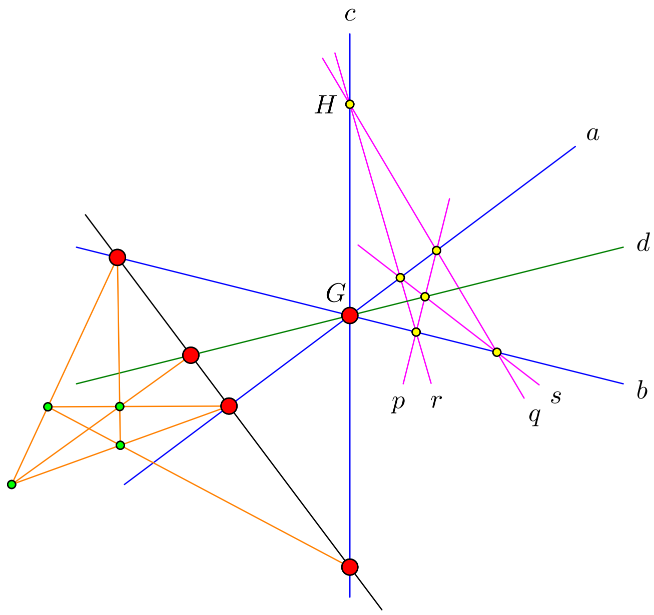
<u>Lösung:</u>

a)
1. Wähle Punkt P beliebig, abseits der Rechengerade g.
2. Wähle Gerade h beliebig durch C.
3. $Q = (A \vee P) \wedge h$.
4. $R = (B \vee P) \wedge h$.
5. $S = (A \vee R) \wedge (B \vee Q)$.
6. $D = (P \vee S) \wedge g$.



b)
1. Wähle Gerade p beliebig, abseits des „Rechenpunktes“ G.
2. Wähle Punkt H beliebig auf c.
3. $q = (a \wedge p) \vee H$.
4. $r = (b \wedge p) \vee H$.
5. $s = (a \wedge r) \vee (b \wedge q)$.
6. $d = (p \wedge s) \vee G$.

c) Während die primale Konfiguration vier Hilfspunkte und deren sechs Verbindungsgeraden enthält, finden sich in der dualen Konfiguration vier Hilfsgeraden und deren sechs Schnittpunkte.



Die Konstruktion zu Teilaufgabe c) ist rechts zu erkennen; auf der linken Seite ist bereits die Konstruktion zu Teilaufgabe f) eingezeichnet.

d) Die algebraischen Berechnungen zum Doppelverhältnis unterscheiden nicht zwischen Primal und Dual: ausgehend von Vektoren werden über Kreuzprodukte neue Vektoren errechnet. Aus diesem Grund ist die Interpretation als primale und duale Konfiguration unabhängig von der algebraischen Struktur dahinter. Wenn also die primale Konfiguration zu einer bestimmten Determinantengleichung führt, muss das die duale zwangsläufig auch tun. Es gilt also auch hier

$$(a, b; c, d)_l = \frac{[a, c, l][b, d, l]}{[a, d, l][b, c, l]} = -1$$

für jede beliebige Gerade l, die nicht durch den Punkt G läuft.

e) Damit es überhaupt vier verschiedene Schnittpunkte auf der Ferngerade gibt, kann der gemeinsame Punkt G nicht im Unendlichen liegen. Es bietet sich also an, die Ferngerade als die Gerade zu verwenden, von der aus die vier Geraden betrachtet werden, um das Doppelverhältnis entsprechend obigem Determinantenausdruck zu bestimmen:

$$(a, b; c, d)_{l_\infty} = \frac{[a, c, l_\infty][b, d, l_\infty]}{[a, d, l_\infty][b, c, l_\infty]}$$

Eine Gerade g mit homogenen Koordinaten $(g_1, g_2, g_3)^T$ schneidet die Ferngerade $l_\infty = (0, 0, 1)^T$ in einem Punkt

$$g \times l_\infty = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 \\ -g_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Schnittpunkte kann man wieder von einem beliebigen endlichen Punkt aus betrachten, etwa vom Punkt $(0, 0, 1)^T$. Für jede einzelne im Doppelverhältnis auftauchende Matrix gilt dann eine Gleichung der Form

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & 0 \\ -a_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung gilt, weil die Zeilenvertauschung genau durch den Vorzeichenwechsel kompensiert wird, und weil die letzte Zeile in den ersten beiden Spalten keine Rolle spielt, wie man leicht durch Entwicklung nach der letzten Spalte sieht. Wenn der Wert jeder einzelnen Determinante gleich bleibt, egal ob man die Gerade von der Ferngerade aus betrachtet, oder den zugehörigen Fernpunkt vom Ursprung aus, dann wird das auch für jeden aus diesen Determinanten zusammengesetzten Ausdruck und folglich auch für das Doppelverhältnis gelten.

Deswegen kann man allgemein das Doppelverhältnis von vier konkurrenten Geraden entweder über die Schnittpunkte mit einer weiteren Geraden, oder aber über die aus den homogenen Koordinaten der Geraden bestimmten Determinanten ausrechnen. Das Ergebnis wird für beide Berechnungen das gleiche sein.

f) Die Schnittpunkte liegen wieder in harmonischer Lage, wie man leicht anhand der entsprechenden Nachweiskonstruktion feststellen kann. Das Ergebnis wäre übrigens mal wieder ein hübscher inzidenzgeometrischer Schließungssatz, der besagt, dass diese Konstruktion wie abgebildet aufgehen muss. Die Abbildung ist bei Teilaufgabe c) zu sehen.

g) Der beste Repräsentant für alle Geraden, die in eine bestimmte Richtung verlaufen, ist der zu dieser Richtung gehörige Fernpunkt. Wenn man sich ausschließlich auf die Steigungen von Geraden konzentriert, arbeitet man gleichsam mit diesen Fernpunkten, und somit auf einer projektiven Geraden, nämlich der Geraden im Unendlichen.

Während man also für vier konkurrente Geraden ein Doppelverhältnis ausrechnen konnte, indem man sie von einer beliebigen (nicht dazu konkurrenten) Geraden aus betrachtet, wählt man bei allgemeinen Geraden und der Konzentration auf die Steigungen die Ferngerade als diejenige Gerade, von der aus das Doppelverhältnis betrachtet werden soll.

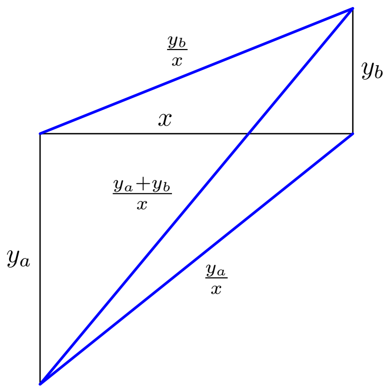
h) Eine Gerade mit homogenen Koordinaten $(a, b, c)^T$ kann man beschreiben durch die nicht-homogene Gleichung $ax + by + c = 0$ bzw. $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$, so dass $-\frac{a}{b}$ die Steigung darstellt. Man könnte die folgenden Geraden verwenden, um die projektive Skala zu repräsentieren:

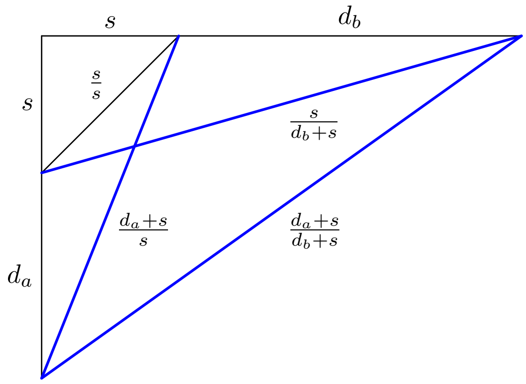
$$g_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix} \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ * \end{pmatrix} \qquad g_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$$

Bezüglich dieser Skala kann man jetzt eine Gerade mit Steigung t in das Doppelverhältnis einsetzen:

$$(g_0, g_\infty; g_t, g_1)_{l\infty} = \frac{[g_0, g_t, l_\infty][g_\infty, g_1, l_\infty]}{[g_0, g_1, l_\infty][g_\infty, g_t, l_\infty]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-t) \cdot (-1)}{(-1) \cdot (-1)} = t$$

i) Man kann einfach die Längen der horizontalen und vertikalen Geraden mit Variablen benennen, und die Steigungen der anderen Geraden als Brüche in diesen Variablen bezeichnen:





Man sieht damit sofort:

$$a + b = \frac{y_a}{x} + \frac{y_b}{x} = \frac{y_a + y_b}{x}$$
$$a \cdot b = \frac{d_a + s}{s} \cdot \frac{s}{d_b + s} = \frac{d_a + s}{d_b + s}$$

Aufgabe 4. Ganz oder gar nicht

Definieren Sie sich die Ebene $\mathbb{ZP}^2$ wie gewohnt durch Identifizierung skalarer Vielfacher in $\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ und Inzidenztests über Skalarprodukte.

a) Ist die angegebene Struktur eine echte projektive Ebene?

b) Gibt es eine projektive Ebene über einem Körper, die isomorph zur angegebenen Struktur ist? Falls ja, benennen Sie diesen Körper. Falls nein, führen Sie einen Beweis, dass es einen solchen Körper nicht geben kann.

c) Geben Sie unter Verwendung der anderen Aufgaben dieses Aufgabenblattes eine Inzidenzkonfiguration an, die innerhalb dieser Struktur nicht realisierbar ist, innerhalb von $\mathbb{RP}^2$ hingegen schon.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Die Ebene ist eine echte projektive Ebene. Man kann Schnitt und Verbindung durch Kreuzprodukte ausdrücken, und da diese ohne Division auskommen, macht es nichts, dass $\mathbb{Z}$ nur ein Ring ist. Auch die Stanard-Basis aus vier Punkten in allgemeiner Lage ist komplett ganzzahlig.

b) Die angegebene Ebene ist isomorph zu $\mathbb{QP}^2$. Homogene Koordinatenvektoren aus $\mathbb{Q}^3$ können einfach mit dem Hauptnenner durchmultipliziert werden, um einen entsprechenden Vektor aus $\mathbb{Z}^3$ zu erhalten, der in der gleichen Äquivalenzklasse liegt.

c) Man kann die in Aufgabe 19 c) angegebene Konstruktion, die die Wurzel aus Zwei überprüft, verwenden. Selbst wenn keine projektive Basis vorgegeben ist, und diese beliebig gewählt wird, gibt es dennoch ein Punktequadrupel, das das Doppelverhältnis $\sqrt{2}$ hat. Da Doppelverhältnisse in $\mathbb{QP}^2$ nur rational sein können, kann diese Konfiguration dort nicht realisiert werden.