Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Lösungen zu Aufgabenblatt 3 (5. Mai 2014)

— ***Präsenzaufgaben***—

Aufgabe 1. Satz von Desargues

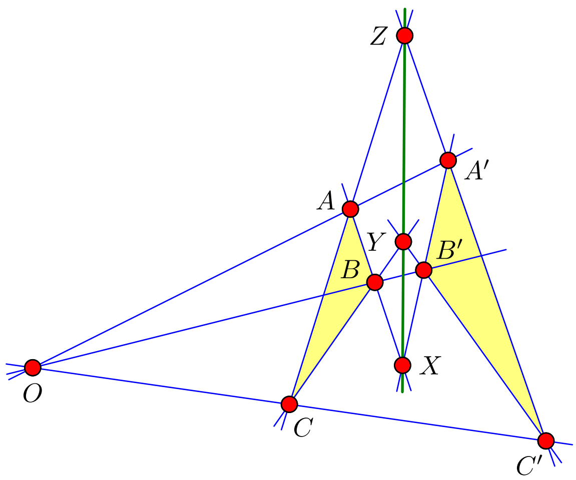
a) Fertigen Sie zwei Skizzen vom Satz von Desargues an: eine projektive, so allgemein wie möglich, sowie eine euklidische, bei der die Konklusion eine Inzidenz mit der Geraden im Unendlichen ist.

b) Beschreiben Sie die Aussagen beider Varianten in Worten oder Formeln.

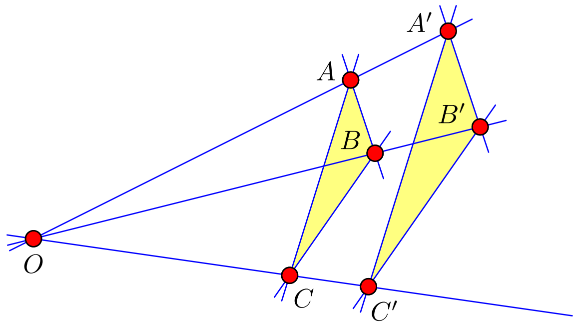
c) Beweisen Sie den Satz mit Hilfe geeigneter euklidischer Lehrsätze, wie sie aus der Schule bekannt sind.

Lösung:

a) Projektiv „so allgemein wie möglich“ soll bedeuten, dass nicht der kleine Satz von Desargues zu zeichnen ist, dass also keine vier Punkte der Konfiguration kollinear sind. Euklidisch sind Geraden parallel, wenn ihre Schnittpunkte mit der Geraden im Unendlichen inzident sind.



Projektiv



Euklidisch

b) **Projektiv:** Wenn die folgenden Punktetripel kollinear sind:

O, A, A'	A, B, X	A', B', X
O, B, B'	B, C, Y	B', C', Y
O, C, C'	C, A, Z	C', A', Z'

Dann ist auch das Tripel X, Y, Z kollinear.

Euklidisch: Wenn die folgenden Punktetripel kollinear sind:

$$O, A, A' \qquad\qquad O, B, B' \qquad\qquad O, C, C'$$

und außerdem die folgenden Geraden parallel sind:

$$AB \parallel A'B' \qquad\qquad BC \parallel B'C'$$

Dann sind auch die folgenden Geraden parall: $CA \parallel C'A'$

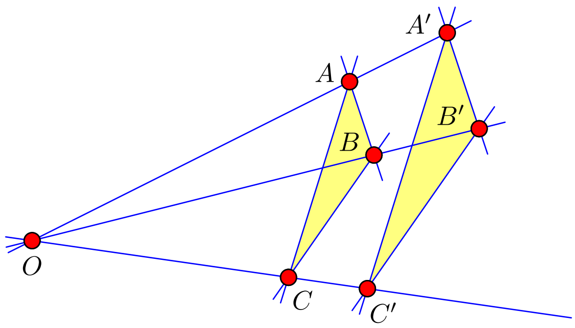
Damit im Euklidischen die Konklusionsgerade zwingend die Ferngerade ist, muss die Annahme, dass zwei der Punkte Fernpunkte sind, bereits in die Annahmen aufgenommen werden. Die Tatsache, dass der dritte Punkt Z ebenfalls auf der Ferngeraden liegt, entspricht direkt der Kollinearität dreier Punkte in der projektiven Formulierung.

c) Die euklidische Variante des Satzes lässt sich mit Hilfe des Strahlensatzes beweisen:

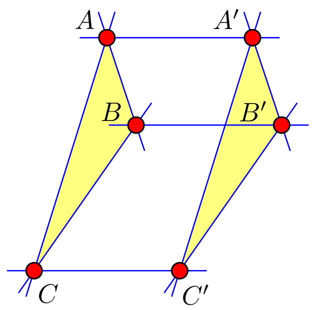
$$\frac{|O,A'|}{|O,A|} = \frac{|O,B'|}{|O,B|} = \frac{|O,C'|}{|O,C|}$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt dabei aus $AB \parallel A'B'$, das zweite aus $BC \parallel B'C'$. Aus der Transitivität ergibt sich die Gleichheit des ersten und letzten Terms, aus der man die letzte Parallelität schlussfolgern kann.

Der Ansatz über Strahlensatz behandelt nicht den „kleinen“ Satz von Desargues, bei dem der Punkt O im Unendlichen liegt und die Geraden durch ihn folglich parallel verlaufen. Dieser Fall lässt sich auch nicht durch Wahl einer anderen projektion abhandeln, da die Kollinearität der dann vier Fernpunkte O, X, Y, Z durch keine projektive Transformation aufgebrochen werden kann.



Allgemein



Spezialfall

Dieser Spezialfall muss also explizit behandelt werden. Wegen des Parallelograms $ABB'A'$ sind die Längen $|A,B|$ und $|A',B'|$ gleich lang. Analog für $BCC'B'$. Außerdem sind die Winkel ABC und $A'B'C'$ einander entsprechende Winkel an parallelen Geraden und daher auch gleich groß. Deswegen sind die beiden Dreiecke nach dem SWS-Satz kongruent. Daraus wiederum folgt, dass auch die einander entsprechenden Winkel gleich groß sind, und deswegen auch die letzten beiden Geraden parallel liegen müssen.

Projektiv gesehen sind beide Sätze reine Inzidenzaussagen. Deswegen sind sie unter projektiven Transformationen invariant, so dass die beiden eben euklidisch ausgeführten Beweise auch für Situationen, in denen die Gerade im Unendlichen keine Gerade der Konfiguration ist, ihre Gültigkeit behalten müssen. Anders gesagt: jede beliebige Desargues-Konfiguration ließe sich durch eine geeignete Abbildung so transformieren, dass die Konklusion auf der Geraden im Unendlichen stattfindet, so dass die euklidischen Beweise anwendbar sind.

Aufgabe 2. Scherensatz

Der soganannte *Scherensatz* besagt:

Wenn die folgenden Inzidenzen gelten:

- a, b, A, B liegen auf einer Geraden
- c, d, C, D liegen auf einer Geraden
- $a \vee c$ und $A \vee C$ sind parallel
- $a \vee d$ und $A \vee D$ sind parallel

- $b \vee c$ und $B \vee C$ sind parallel

dann sind auch die Geraden $b \vee d$ und $B \vee D$ parallel.

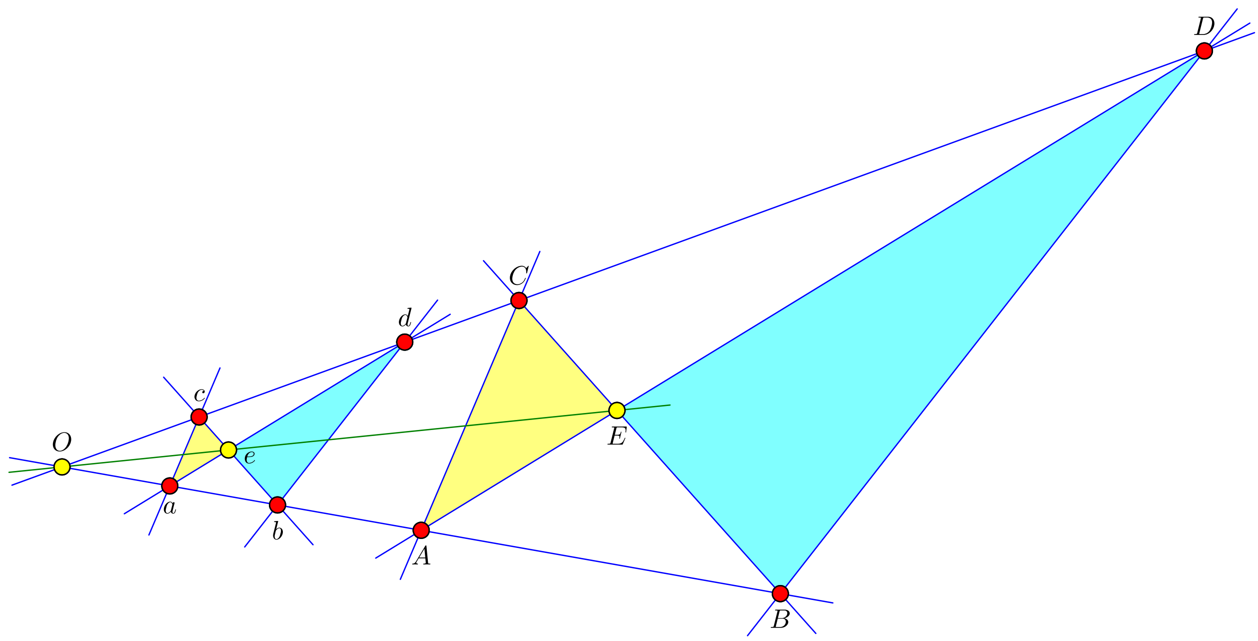
a) Fertigen Sie eine Skizze des Scherensatzes an.

b) Verwenden Sie den Satz von Desargues, um den Scherensatz zu beweisen. Beweisen Sie auch eventuelle Sonderfälle, die durch den allgemeinen Beweis nicht abgedeckt werden.

c) Formulieren Sie die projektive Verallgemeinerung dieses Satzes, und zeichnen Sie diese so, dass alle Punkte und Geraden der Konfiguration endlich und in der Konstruktion erkennbar sind.

LÖSUNG:

a) In der folgenden Zeichnung sind bereits Punkte eingezeichnet, die für den Beweis in Teilaufgabe b) verwendet werden.



b) *Warnung:* Es ist nicht zulässig, den Satz von Desargues anzuwenden, indem man zwei seiner Konfigurationsgeraden zusammenfallen lässt. Dadurch würde der Satz entarten, so dass seine Aussage nicht mehr zwingend stimmt. In der Tat kann man die daraus folgernde Behauptung ziemlich leicht mit einem Gegenbeispiel widerlegen.

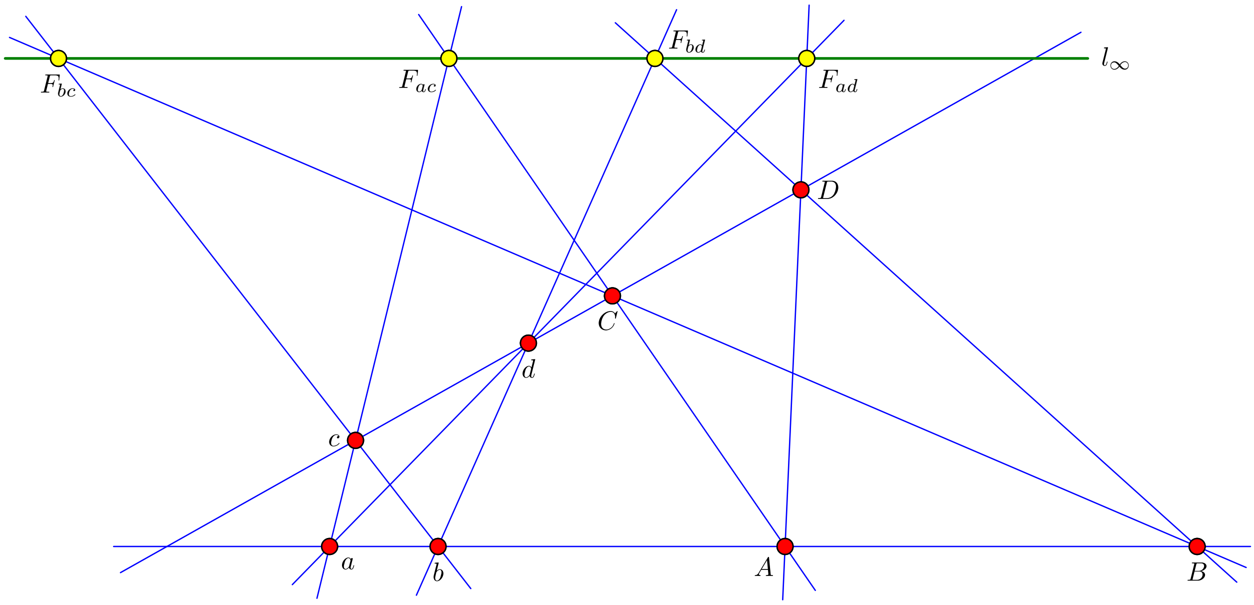
Um drei Geraden zu erhalten, betrachtet man am besten noch die in der Skizze eingefügten Schnittpunkte e und E. Da die Dreiecke ace und ACE zueinander parallele Kanten haben, gehen die drei Kanten aA, bB und eE durch einen gemeinsamen Punkt O, der eventuell im Unendlichen liegen kann. Diese Schnlussfolgerung ergibt sich aus dem Satz von Desargues, indem man entweder die Konklusion an eine andere Stelle verschiebt, oder indem man ihn dualisiert, um die ursprüngliche Schlussfolgerung einer Kollinearität in eine Schlussfolgerung einer Konkurrenz umzuwandeln.

Auf diesen drei konkurrenten Geraden gibt es jetzt zwei weitere Dreiecke, bde und BDE. Diese haben jeweils zwei parallele Kanten. In einer zweiten Anwendung des Satzes von Desargues folgt daraus, dass auch das dritte Paar von Kanten parallel sein muss.

Fehler: Der Hinweis auf Sonderfälle ist bei dieser Aufgabe eigentlich deplatziert. Der auftretende Sonderfall des kleinen Satzes von Desargues wurde in der vorherigen Aufgabe bereits behandelt. Besser wäre es gewesen, den Hinweis zu dieser Aufgabe zu schreiben. Hier reicht es zu betrachten, dass O endlich oder unendlich sein kann, und beide Fälle durch den Satz von Desargues in seiner Allgemeinheit abgedeckt sind.

c) Um den Satz projektiv zu verallgemeinern, wird die Ferngerade von ihrer Sonderrolle befreit und als reguläre Gerade der Konfiguration betrachtet. Dabei werden die ursprünglichen Fernpunkte, die die Parallelität ausdrücken, zu Punkten der Konfiguration, die in der Zeichnung mit F_* beschriftet wurden.

   Man beachte die starke Symmetrie der Konfiguration: die ursprüngliche Gerade im Unendlichen ist gleichwertig zu den beiden anderen Konfigurationsgeraden mit vier Punkten. Damit sind auch alle Punkte gleichwertig, und die Konklusion kann für jeden beliebigen dieser Punkte formuliert werden.



Aufgabe 3. Pappos in Koordinaten

In dieser Aufgabe soll der Satz von Pappos mit Hilfe von reellen Variablen als Koordinaten nachgewiesen werden. Beschränken Sie sich für diese Aufgabe auf nicht-degenerierte Instanzen der Pappos-Konfiguration, wo nicht anders angegeben.

a) Wie viele Punkte der Pappos-Konfiguration können Sie in allgemeiner Lage frei wählen, so dass sich alle anderen Punkte daraus zwingend ergeben?

b) Begründen Sie, warum Pappos-Konfigurationen unter projektiven Transformationen wieder in Pappos-Konfigurationen überführt werden. Überlegen Sie sich, wie Sie diese Eigenschaft im weiteren Beweis vorteilhaft nutzen können.

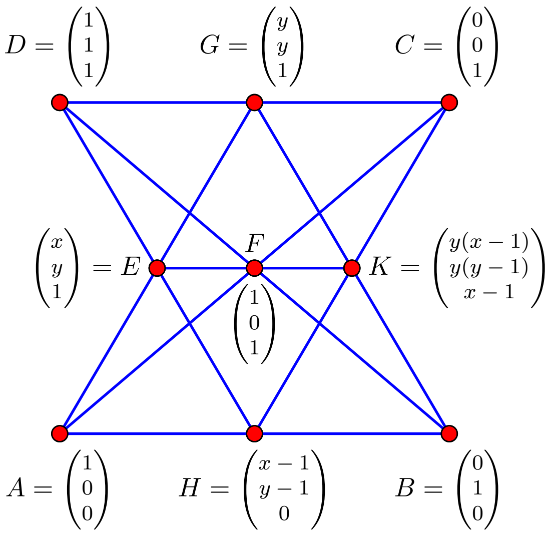
c) Betrachten Sie Pappos-Konfigurationen als äquivalent, wenn sie durch eine projektive Transformation ineinander überführt werden können. Wie viele reelle Parameter benötigen Sie, um jede dieser Äquivalenzklassen eindeutig zu charakterisieren?

d) Nehmen Sie die eben bestimmten reellen Parameter als Variablen an, und errechnen Sie für jeden Punkt der Konfiguration die sich dadurch ergebenden Koordinaten aus.

e) Drücken Sie die Aussage des Satzes mit Hilfe dieser Koordinaten aus, und führen Sie den Beweis dieser Aussage.

f) Untersuchen Sie, für welche Kombinationen der in Ihrem Ansatz vorkommenden Parameter der Satz von Pappos degeneriert, und beschreiben Sie, wie sich dies auf den Beweis auswirkt.

LÖSUNG:



a) Man kann 5 Punkte frei wählen, von denen keine drei auf einer Geraden der Konfiguration liegen. Beispielsweise kann man die „Eckpunkte“ A bis D frei wählen, und einen der beiden Endpunkte der inneren Geraden, also beispielsweise E.

b) Der Grund dafür ist einfach die Tatsache, dass der Satz von Pappos ein reiner Inzidenzsatz ist, und dass Inzidenzen unter projektiven Abbildungen erhalten bleiben. Aus diesem Grund kann man im weiteren Beweis vier Punkte in allgemeiner Lage beliebig wählen, ohne dabei die Allgemeinheit zu beschränken.

c) Wählt man sich also vier Punkte in allgemeiner Lage als projektive Basis, so wählt man damit aus jeder der in der Aufgabenstellung beschriebenen Äquivalenzklassen genau einen Repräsentanten aus. Die Äquivalenzklassenbildung entspricht also in gewissem Sinne der Festlegung von Koordinaten für diese vier Punkte.

   Von den in Teilaufgabe a) genannten 5 Punkten bleibt dann noch einer übrig. Dieser lässt sich als Punkt in der projektiven Ebene mit drei reellen Zahlen beschreiben. Nachdem man jedoch unter den Nichtdegeneriertheitsannahmen bestimmte Geraden ausschließen kann, reicht es, einen affinen Parameterraum zu wählen und den Punkt mit zwei reellen Parametern zu beschreiben.

d) Konkret kann man folgende Koordinaten wählen:

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

   Der Punkt E kann garantiert durch einen Repräsentanten der angegebenen Form beschrieben werden, weil alle Punkte mit einer 0 in der letzten Komponente auf der Geraden $A \vee B$ liegen (entspricht der Ferngeraden zu unserem Parameterraum) und die Inzidenz des Punktes E mit dieser Geraden zu einer degenerierten Situation führen würde, was wir laut Angabe ausschließen dürfen.

   Die eben angegebene Wahl von Vorgaben ist natürlich alles andere als eindeutig; man hätte genausogut andere vier Punkte in allgemeiner Lage mit festen Koordinaten belegen können, hätte diese festen Koordinaten anders wählen können, hätte einen anderen Punkt durch die Parameter beschreiben können oder die Parameter auf andere Elemente des Repräsentantenvektors verteilen können. Es gibt also viele richtige Lösungen dieser Aufgabe.

   Ausgehend von den oben gewählten Koordinaten kann man die restlichen Koordinaten der Konstruktion bestimmen, indem man die Konstruktionsschritte nachbildet:

$$
\begin{aligned}
F = (A \vee C) \wedge (B \vee D) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
G = (C \vee D) \wedge (A \vee E) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right) &&= \begin{pmatrix} y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
H = (A \vee B) \wedge (D \vee E) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right) &&= \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
K = (B \vee G) \wedge (C \vee H) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &&= \begin{pmatrix} y(x-1) \\ y(y-1) \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy-y \\ y^2-y \\ x-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Diese Vektoren kann man entweder über Kreuzprodukte ausrechnen, oder durch „scharf draufschauen“ ermitteln:

- Die Menge aller zu $A \vee B$ inzidenten Punkte ist die Menge aller von Null verschiedenen Linearkombinationen von A und B. Das sind alle Vektoren, die eine 0 in ihrem mittleren Eintrag haben. Der Punkt F muss also diese Form haben. Andererseits stimmen alle Punkte auf $B \vee D$ in ihrer ersten und letzten Koordinate überein. Da skalare Vielfache im Ergebnis keine Rolle spielen, kann der Punkt F also wie angegeben bezeichnet werden.
- Für G gilt, dass das Ergebnis wegen $C \vee D$ in den ersten beiden Koordinateneinträgen übereinstimmen muss, und wegen $A \vee E$ ein Vielfaches von $(*, y, 1)^T$ sein muss.
- Punkt H muss in der letzten Komponente eine 0 haben, was durch $E - D$ zu erreichen ist.
- Für den Punkt K gilt:

$$
\begin{aligned}
K = \lambda \begin{pmatrix} y \\ * \\ 1 \end{pmatrix} &= \mu \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ * \end{pmatrix} \\
\lambda \cdot y &= \mu \cdot (x-1)
\end{aligned}
$$

  Diese homogene Gleichung lässt sich am einfachsten durch $\lambda = (x-1)$ und $\mu = y$ lösen, was zu dem angegebenen Vektor führt.

e) Die Konklusion des Satzes ist die Kollinearität der drei Punkte E, F und K, die sich als Determinante schreiben lässt:

$$
\begin{aligned}
[E, F, K] = \begin{vmatrix} x & 1 & xy-y \\ y & 0 & y^2-y \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} &= (y^2-y) + (xy^2-y^2) - (xy^2-xy) - (xy-y) \\
&= y^2 - y + xy^2 - y^2 - xy^2 + xy - xy + y = 0
\end{aligned}
$$

Damit ist bewiesen, dass die letzte Kollinearität auch erfüllt sein muss.

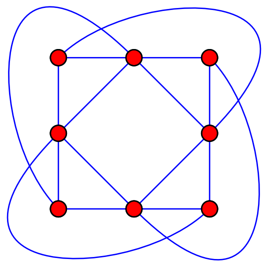
f) Die vier vorgegebenen Punkte A bis D haben zusammen sechs Verbindungsgeraden. Von diesen sind vier auch Geraden der Konfiguration. Doch auch falls E auf einer der anderen beiden Geraden, die nicht Geraden der Konfiguration sind, liegt, fallen im weiteren Verlauf dann Objekte zusammen und der Satz degeneriert. Durch die Koordinatenwahl ist bereits garantiert, dass der Punkt E nicht auf $A \vee B$ liegen kann. Die fünf Bedingungen lassen sich als Gleichungen für x und y schreiben:

$$
\begin{array}{lll}
E \not{I}\, (A \vee C) & E \neq (*, 0, *)^T & y \neq 0 \\
E \not{I}\, (B \vee D) & E \neq (\lambda, *, \lambda)^T & x \neq 1 \\
E \not{I}\, (C \vee D) & E \neq (\lambda, \lambda, *)^T & x \neq y \\
E \not{I}\, (A \vee D) & E \neq (*, \lambda, \lambda)^T & y \neq 1 \\
E \not{I}\, (B \vee C) & E \neq (0, *, *)^T & x \neq 0
\end{array}
$$

Wenn (x, y) gegen eine dieser Bedingungen verstößt, resultiert daraus eine degenerierte Situation, bei der mehrere Geraden der Konfiguration zusammenfallen. Dadurch wären manche der bei den Koordinatenberechnungen verwendeten Verbindungsgeraden und Schnittpunkte geometrisch gar nicht definiert. Oder die Konklusionsgerade enthält nur noch zwei verschiedene Punkte statt drei. Mit Kreuzprodukten würde man an den Stellen Nullvektoren erhalten, was die Degeneriertheit der Konfiguration zum Ausdruck bringt, aber natürlich auch die letzte Determinante zum verschwinden bringt. Wenn man für alle Punkte Koordinaten aus den obigen Formeln errechnet, werden alle in den Voraussetzungen sowie in der Hypothese geforderten Kollinearitäten erfüllt sein, in vielen Fällen aber einfach dadurch, dass Punkte zusammenfallen.

— *Hausaufgaben*—

Aufgabe 4. Einbettung einer 8_3-Konfiguration



In dieser Aufgabe soll die nebenstehende 8_3-Konfiguration mit konkreten Koordinaten in eine projektive Ebene $\mathbb{KP}^2$ eingebettet werden. Die Punkte und Geraden der Konfiguration sollen also echte Punkte und Geraden der umgebenden projektiven Ebene sein, und die Inzidenzrelation der Konfiguration sei die Einschränkung der gewöhnlichen Inzidenzrelation auf die Menge der in der Konfiguration vorkommenden Punkte und Geraden.
Beschränken Sie sich bei Ihren Betrachtungen auf den nicht-degenerierten Fall, bei dem also keine Punkte oder Geraden der Konfiguration zusammenfallen.

a) Wie viele skalare Parameter benötigen Sie, um diese 8_3-Konfiguration bis auf projektive Transformationen eindeutig zu beschreiben?

b) Geben Sie konkrete Koordinaten für alle Punkte der Konfiguration an. Wählen Sie das Koordinatensystem dabei so geschickt, dass möglichst viele „einfache“ Vektoren als Punktkoordinaten auftreten, und lediglich die eben bestimmten skalaren Parameter als Variablen vorkommen.

c) Geben Sie an, welche Inzidenzen in der Konfiguration zusätzlich gelten müssen, die durch die Konstruktion der Punktkoordinaten noch nicht garantiert sind.

d) Drücken Sie diese Inzidenzen als Determinanten aus.

e) Begründen Sie, weshalb diese 8_3-Konfiguration unmöglich in den $\mathbb{RP}^2$ eingebettet werden kann, jedoch problemlos in den $\mathbb{CP}^2$.

f) Die Einbettungen dieser Konfiguration in den $\mathbb{CP}^2$ gliedern sich in Äquivalenzklassen, innerhalb derer sich die Instanzen nur durch eine projektive Transformation unterscheiden. Wie viele verschiedene derartige Klassen gibt es?

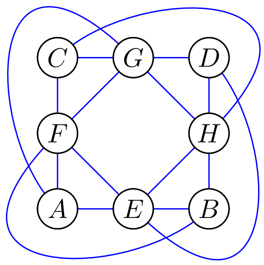
Lösung:

a) Es wird ein skalarer Parameter benötigt. Durch Wahl einer Projektiven Basis sind vier Punkte in allgemeiner Lage mit konkreten Koordinaten anzugeben. Das können etwa die vier Ecken des Quadrates sein. Wählt man dann noch einen Punkt auf einer der Seiten des Quadrates, so ergibt sich der Rest der Konstruktion zwingend.

   Einen Punkt auf einer (affinen) Geraden kann man durch einen einzigen Parameter beschreiben. Aufgrund der angenommenen nicht-Degeneriertheit kann man einen bereits vorgegebenen Punkt der Geraden ausschließen und sich so auf eine affine statt einer projektiven Geraden beschränken.

b) Eine mögliche Koordinatenwahl wäre die diese:

$$A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$$



$$F = (A \vee C) \wedge (E \vee D) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\1-x\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x\\x-1\end{pmatrix}$$
$$G = (C \vee D) \wedge (F \vee B) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1-x\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\x\\x-1\end{pmatrix}$$
$$H = (D \vee B) \wedge (G \vee A) = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\1-x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\x\\x\end{pmatrix}$$

   Natürlich gibt es noch viele weitere mögliche sinnvolle Koordinatenwahlen. Es gibt viele Möglichkeiten, wie man die projektive Basis wählen kann. Für jede Basis kann man sich zwei zu einer gemeindamen Konfigurationsgeraden inzidente Punkte auswählen, um den dritten Punkt dieser Geraden als Linearkombination der zwei festen Punkte zu beschreiben. Und dann hat man immernoch die Wahl, welchen der Punkte man mit Faktor 1 eingehen lässt, und welchen mit Faktor x.

c) Durch die Koordinatenwahl ist die Kollinearität AEB gewährleistet. Sechs weitere Geraden tauchen in den Rechenschritten für die anderen Koordinaten auf, und gewährleisten dort auch jeweils eine Kollinearität des neu berechneten Punktes mit zwei bereits bekannten. Die einzige Gerade der Konfiguration, die noch nicht berücksichtigt wurde, ist die Gerade EHC. Man hätte diese für die Konstruktion von H verwenden können, aber dann wäre irgendeine andere Gerade unberücksichtigt geblieben.

d) Drei Punkte sind genau dann kollinear, wenn ihre Determinante verschwindet.

$$0 = \det(E, H, C) = \begin{vmatrix} x & x-1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x + 1$$

e) Löst man die obige Determinantenbedingung nach x auf, so erhält man über $\mathbb{C}$:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

   Über den reellen Zahlen hingegen hat die Gleichung keine Lösung, so dass die letzte Kollinearität dort nicht erfüllt werden kann, egal wie man x wählt.

f) Die Äquivalenzklassen entsprechen genau den Lösungen der obigen Gleichung, es gibt also genau zwei solche Klassen. Jede Äquivalenzklasse enthält einen Repräsentanten, in dem die Eckpunkte die angegebenen Koordinaten haben, so dass auch der Punkt E eine der beiden möglichen Lösungen der quadratischen Gleichung darstellen muss.

Aufgabe 5. Doppelverhältnis auf der Geraden und in der Ebene

Im Rahmen dieser Aufgabe sei das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten im $\mathbb{KP}^2$ definiert wie folgt:

(i) Für die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sei das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ (für beliebiges λ) definiert als

$$(A, B; C, D_\lambda) := \lambda$$

(ii) Das Doppelverhältnis von vier beliebigen kollinearen Punkten in der Ebene ist invariant unter projektiven Transformationen der Ebene.

a) Begründen Sie, weshalb durch diese Definition jedes beliebige Doppelverhältnis von vier Punkten eindeutig definiert ist.

b) Das Doppelverhältnis gesehen von einem fünften Punkt O ist wie in der Vorlesung definiert als

$$(A, B; C, D)_O := \frac{[OAC][OBD]}{[OAD][OBC]}$$

Zeigen Sie: Wenn A, B, C, D auf einer Geraden liegen, und O nicht auf dieser Geraden liegt, dann gilt

$$(A, B; C, D) = (A, B; C, D)_O$$

Hinweis: Dies verallgemeintert den Beweis, der in der Vorlesung nur über $\mathbb{R}$ geführt worden war, über beliebige Körper. Wo in der Vorlesung Längen als Definition für das Doppelverhältnis auf einer Geraden dientent, wurden hier statt dessen Koordinaten verwendet.

<u>Lösung:</u>

Fehler: Die gesamte Aufgabe behandelt den Fall, dass zwei der Punkte im Doppelverhältnis zusammen fallen, nicht ordentlich. Insbesondere der Fall $\lambda = \infty$ ist mit $\lambda \in \mathbb{K}$ nicht ordentlich abgedeckt. Die folgenden Lösungen beschränken sich daher auf vier paarweise verschiedene Punkte. Außerdem wiederholt die Teilaufgabe a) nicht noch einmal die Anforderung, dass die Punkte kollinear sein müssen.

a) Man kann durch eine projektive Transformation drei von vier kollinearen Punkten auf A, B und C abbilden. Diese Transformation ist noch nicht eindeutig definiert, aber eine beliebige Transformation, die dies leistet, reicht hier aus. Durch eine solche Transformation wird der vierte kollineare Punkt ebenfalls auf einen Punkt auf der x-Achse abgebildet, und hat somit einen Repräsentanten der Form D_λ. Damit kann man das Doppelverhältnis λ ablesen. Da weder Repräsentantenwahl noch projektive Transformation das Doppelverhältnis ändern, ist das so abgelesene Doppelverhältnis gleich dem ursprüngliche. Dabei ist die Invarianz unter projektiven Transformationen explizit Teil der Definition, die Invarianz unter Repräsentantenwahl indirekt dadurch gegeben, dass von Punkten und nicht von Vektoren die Rede ist.

b) Es existiert eine eindeutig bestimmte projektive Transformation, die beliebige der Angabe entsprechende Punkte A, B, C, O so abbildet, dass A bis D die Koordinaten aus a) haben, und O die Koordinaten $O = (0, 1, 0)^T$ hat. Diese projektive Transformation lässt das Doppelverhältnis wieder invariant. Außerdem bildet sie D auf ein geeignetes D_λ ab. Jetzt kann man einfach nachrechnen:

$$(A, B; C, D)_O = \frac{[OAC][OBD]}{[OAD][OBC]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \cdot \lambda}{(-1) \cdot 1} = \lambda$$