Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

`www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14`

Lösungen zu Aufgabenblatt 1 (14. April 2014)

— ***Präsenzaufgaben für Gruppen 1 und 2, Hausaufgaben für Gruppen 3 und 4*** —

Aufgabe 1. Inzidenzmatrix mit Lücken

★a) Ergänzen Sie die Lücken in der nachfolgenden Matrix so, dass diese die Inzidenzstruktur einer endlichen projektiven Ebene darstellt. Dabei symbolisiert ✔ eine Inzidenz, und – keine Inzidenz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
a								–		✔			
b			–	–				–		–	–	–	✔
c			–						✔				
d			–		✔			–					
e	✔								✔				✔
f													
g			–					–					
h	✔	✔											
i							✔					✔	
k	✔				–	–				–		–	
l	✔			✔				✔					
m			✔							✔			
n					–	–		✔					

b) Wie lassen sich aus der Inzidenzmatrix Verknüpfungstabellen für die Operationen $\vee$ (join) und $\wedge$ (meet) ablesen? Legen Sie solche Tabellen an und füllen Sie exemplarisch einige Einträge aus.

c) Welche Ordnung hat diese Ebene?

d) Fertigen Sie eine (unbeschriftete) Skizze dieser Ebene an.
Hinweis: Alle projektiven Ebenen dieser Ordnung sind isomorph.

e) Beschriften Sie die eben angefertigte Skizze in Übereinstimmung mit der Inzidenzmatrix. Wie eindeutig ist eine solche Beschriftung?

f) Auf wie viele verschiedene Arten können die Zeilen und Spalten mit homogenen Koordinaten beschriftet werden?

★g) Geben Sie eine solche Beschriftung an.

Lösung:

a) Die untenstehende Tabelle gibt die Lösung des Problems an. Die Zahlen hinter den einzelnen Matrixeinträgen geben einen Hinweis darauf, in welcher Reihenfolge die Matrix gefüllt werden kann. Dabei finden die folgenden Regeln Anwendung:

Schritt 1: Eine Spalte mit 4 ✔ kann sonst nur noch – enthalten, da jede Gerade 4 Punkte enthält und durch jeden Punkt 4 Geraden gehen.

Gerade Schritte: Es darf kleinen vollständigen 4×4-Minor geben. Wenn also die Einträge (x, X), (x, Y) und (y, X) Inzidenzen sind, kann (y, Y) nicht auch eine Inzidenz sein. Das liegt daran, dass sowohl die Verbindungsgerade $X \vee Y = x$ als auch der Schnittpunkt $x \wedge y = X$ eindeutig sein müssen. Somit kann man von einem rechteckigen Muster mit drei ✔ auf ein – in der vierten Ecke schließen.

Ungerade Schritte: Eine Zeile oder Spalte mit 9 – muss in den verbleibenden 4 Zellen überall ✔ enthalten, da jede Gerade 4 Punkte enthält und durch jeden Punkt 4 Geraden gehen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
a	– 1	– 18	– 2	✔ 19	– 18	– 18	– 14	–	– 18	✔	✔ 17	– 14	✔ 17
b	– 1	– 10	–	–	✔ 11	✔ 11	✔ 11	–	– 2	–	–	–	✔
c	– 1	– 10	–	– 8	– 18	✔ 19	– 8	✔ 7	✔	– 14	✔ 17	– 8	– 2
d	– 1	✔ 19	–	– 20	✔	– 12	– 12	–	– 18	– 18	✔ 17	✔ 21	– 12
e	✔	– 2	– 4	– 2	– 12	– 12	– 4	– 2	✔	– 18	– 4	✔ 19	✔
f	– 1	– 10	✔ 5	✔ 21	– 22	✔ 23	– 6	– 6	– 22	– 6	– 6	✔ 21	– 10
g	– 1	✔ 17	–	✔ 17	– 16	– 16	✔ 15	–	✔ 17	– 16	– 16	– 16	– 16
h	✔	✔	– 4	– 2	– 20	✔ 21	– 4	– 2	– 2	✔ 19	– 4	– 20	– 2
i	– 1	– 10	– 4	– 8	– 12	– 12	✔	✔ 7	– 8	✔ 13	– 4	✔	– 10
k	✔	– 2	✔ 3	– 2	–	–	✔ 3	– 2	– 2	–	✔ 3	–	– 2
l	✔	– 2	– 4	✔	✔ 21	– 20	– 4	✔	– 2	– 14	– 4	– 8	– 2
m	– 1	– 10	✔	– 20	✔ 23	– 22	– 4	– 6	✔ 23	✔	– 4	– 14	– 10
n	– 1	✔ 9	✔ 5	– 2	–	–	– 6	✔	– 8	– 6	– 6	– 8	✔ 9

Auf der Homepage der Vorlesung findet sich auch ein Link zu einem Applet, das beim Ausfüllen dieser Matrix helfen kann.

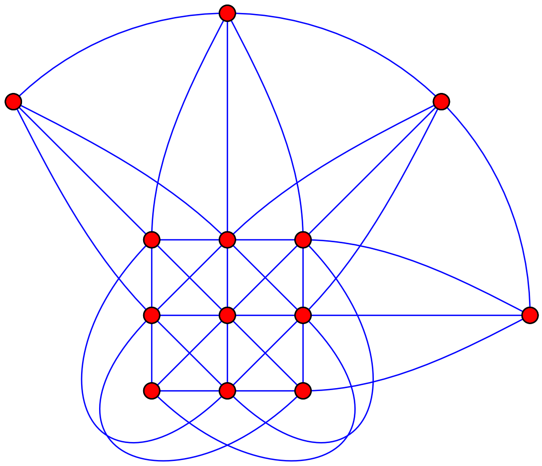
b) Für den Join sucht man sich zu jedem Paar von Punkten (Spalten) die (eindeutg definierte) Gerade (Zeile), die zu beiden gleichzeitig inzident ist, also bei beiden gleichzeitig ein ✔ hat. Analog für den Meet. Vollständig ausgefüllt ergeben sich die folgenden Tabellen für die beiden Operationen.

$\vee$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
A		h	k	l	l	h	k	l	e	h	k	e	e
B	h		n	g	d	h	g	n	g	h	d	d	n
C	k	n		f	m	f	k	n	m	m	k	f	n
D	l	g	f		l	f	g	l	g	a	a	f	a
E	l	d	m	l		b	b	l	m	m	d	d	b
F	h	h	f	f	b		b	c	c	h	c	f	b
G	k	g	k	g	b	b		i	g	i	k	i	b
H	l	n	n	l	l	c	i		c	i	c	i	n
I	e	g	m	g	m	c	g	c		m	c	e	e
K	h	h	m	a	m	h	i	i	m		a	i	a
L	k	d	k	a	d	c	k	c	c	a		d	a
M	e	d	f	f	d	f	i	i	e	i	d		e
N	e	n	n	a	b	b	b	n	e	a	a	e	

$\wedge$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n
a		N	L	L	N	D	D	K	K	L	D	K	N
b	N		F	E	N	F	G	F	G	G	E	E	N
c	L	F		L	I	F	I	F	H	L	H	I	H
d	L	E	L		M	M	B	B	M	L	E	E	B
e	N	N	I	M		M	I	A	M	A	A	I	N
f	D	F	F	M	M		D	F	M	C	D	C	C
g	D	G	I	B	I	D		B	G	G	D	I	B
h	K	F	F	B	A	F	B		K	A	A	K	B
i	K	G	H	M	M	M	G	K		G	H	K	H
k	L	G	L	L	A	C	G	A	G		A	C	C
l	D	E	H	E	A	D	D	A	H	A		E	H
m	K	E	I	E	I	C	I	K	K	C	E		C
n	N	N	H	B	N	C	B	B	H	C	H	C	

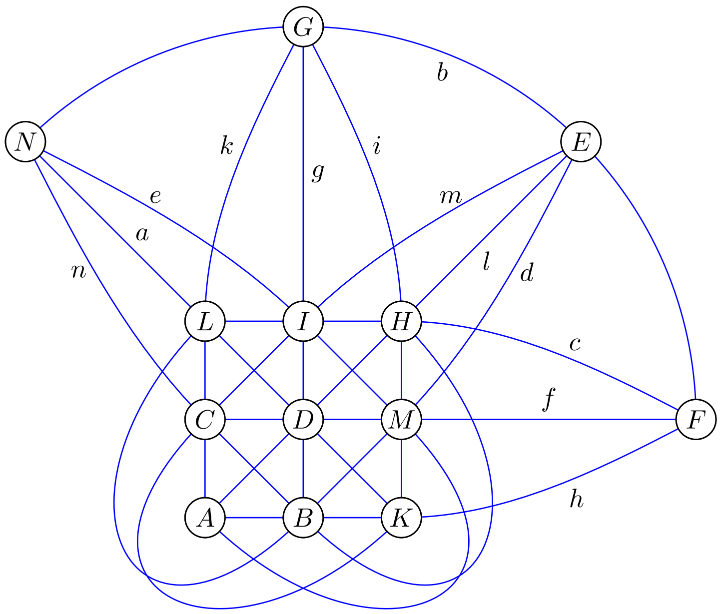
c) Die Ebene hat $13 = 3^2 + 3 + 1$ Punkte, und deshalb Ordnung 3.

d) Da laut Hinweis alle Ebenen dieser Ordnung isomorph sind, kann man die projektive Ebene über $\mathbb{F}_3$ als Grundlage der zeichnung verwenden. Zunächst kann man sich mit $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ die Punkte dieser projektiven Ebene als eine Teilmenge von $\mathbb{RP}^2$ vorstellen und entsprechend darstellen. Die Modulo-Rechnung ergibt jedoch noch zusätzliche Inzidenzen, die am besten durch eine Biegung in den Geraden in Diagonalrichtung dargestellt werden kann.



Man kommt auf die Zusätzlichen Punkte der Diagonalen auch durch „Schritte in Modulorechnung". So gelangt man etwa mit Schritten in Richtung $(1, 1)$, beginnend im Punkt $(0, 1)$, zunächst zu $(1, 2)$ und dann zu $(2, 3)$, was ja modulo 3 den Punkt $(2, 0)$ ergibt. Folglich müssen diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, die auch den Fernpunkt in Richtung $(1, 1)$ enthält. Die Reihenfolge der Punkte auf der Gerade ist ohne Bedeutung, und sollte daher so gewählt werden, dass die resultierende Grafik möglichst übersichtlich bleibt.

e) Vier Punkte, von denen keine drei auf ener Geraden liegen, kann man beliebig zuordnen (vgl. Teilaufgabe e). Trägt man etwa die Punkte A bis D in die linke untere Ecke der Ebene ein, so ergeben sich daraus alle anderen Beschriftungen wie folgt:



f) Eine projektive Abbildung wird bestimmt durch vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Sie bildet die projektive Ebene isomorph auf sich selbst ab. In diesem Sinne kann man vier Punkte frei wählen, der Rest der Ebene ergibt sich daraus. Details zu diesem „sich ergeben" finden sich in der nächsten Teilaufgabe.

13 Möglichkeiten, wie man den Punkt A aus allen Punkten wählen kann.

12 Möglichkeiten, B verschieden von A zu wählen.

9 Möglichkeiten, C abseits der Gerade $A \vee B$ zu wählen.

4 Möglichkeiten, D abseits der drei Geraden $A \vee B$, $B \vee C$ und $C \vee A$ zu wählen.

Somit gibt es insgesamt $13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 4 = 5616$ verschiedene Möglichkeiten, die Zeilen und Spalten mit Äquivalenzklassen homogener Koordinaten zu beschriften.

Für jeden einzelnen Vektor gibt es natürlich zwei mögliche skalare Vielfache, die man als Repräsentanten verwenden kann. Bei je 13 Punkten und Geraden macht das noch mal einen Faktor von $2^{2\cdot 13}$ aus, was zu 376 883 380 224 möglichen Beschriftungen mit konkreten Koordinaten führt. Und wenn man die Modulo-Arithmetik auch wieder als Äquivalenzklassenbildung auffasst und entsprechend für die Elemente des Körpers noch andere Repräsentanten als $0, 1, 2$ zulässt, kann es sogar unendlich viele mögliche Schreibweisen jeder Äquivalenzklasse geben.

g) Am einfachsten wählt man wieder vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, aus, und weist ihnen entsprechende Koordinaten zu, etwa

$$A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich dann alle anderen Punkte sowie alle Geraden ableiten, beispielsweise durch die folgenden Berechnungen, die nur eine von vielen Möglichkeiten darstellen.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

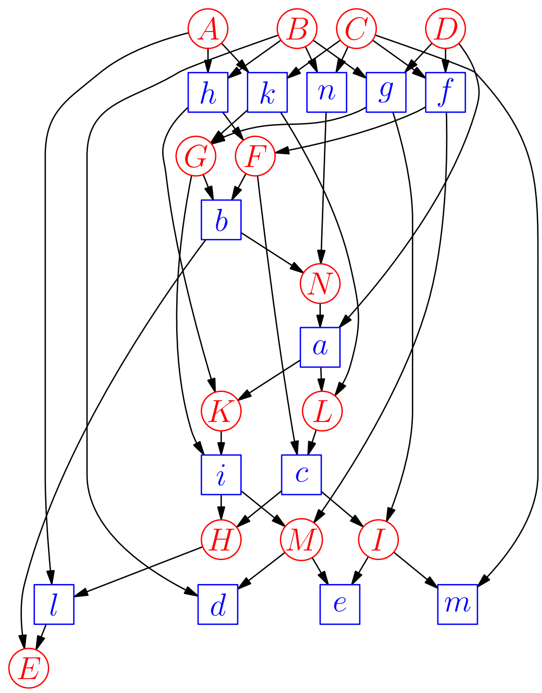
$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

Mit den oben gewählten Ausgangspunkten ergeben sich so die folgenden homogenen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
A &= (0,0,1)^T & N \vee D = a &= (1,1,1)^T \\
B &= (1,0,1)^T & F \vee G = b &= (0,0,1)^T \\
C &= (0,1,1)^T & L \vee F = c &= (0,1,1)^T \\
D &= (1,1,1)^T & B \vee M = d &= (2,1,1)^T \\
l \wedge b = E &= (1,1,0)^T & M \vee I = e &= (1,1,0)^T \\
h \wedge f = F &= (1,0,0)^T & C \vee D = f &= (0,2,1)^T \\
k \wedge g = G &= (0,1,0)^T & B \vee D = g &= (2,0,1)^T \\
i \wedge c = H &= (2,2,1)^T & A \vee B = h &= (0,1,0)^T \\
c \wedge g = I &= (1,2,1)^T & K \vee G = i &= (1,0,1)^T \\
a \wedge h = K &= (2,0,1)^T & A \vee C = k &= (1,0,0)^T \\
a \wedge k = L &= (0,2,1)^T & A \vee H = l &= (1,2,0)^T \\
i \wedge f = M &= (2,1,1)^T & C \vee I = m &= (1,2,1)^T \\
b \wedge n = N &= (1,2,0)^T & B \vee C = n &= (2,2,1)^T
\end{aligned}$$



— ***Präsenzaufgaben***—

Aufgabe 2. (n_r, m_k)-Konfigurationen

Gegeben sei eine Inzidenzstruktur mit Punkten $\mathcal{P}$, Geraden $\mathcal{L}$ und Inzidenzrelation $\mathcal{I}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Zu zwei Punkten $p, q \in \mathcal{P}$ mit $p \neq q$ gibt es höchstens eine Gerade $l \in \mathcal{L}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $q\mathcal{I}l$.

(ii) Zu zwei Geraden $l, m \in \mathcal{L}$ mit $l \neq m$ gibt es höchstens einen Punkt $p \in P$ mit $p\mathcal{I}l$ und $p\mathcal{I}m$.

Eine (n_r, m_k)-Konfiguration ist eine Inzidenzstruktur im eben beschrieben Sinne mit n Punkten und m Geraden, bei der auf jeder Geraden k Punkte liegen und durch jeden Punkt r Geraden gehen.

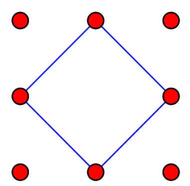
a) Wie unterscheiden sich die oben angegebenen Axiome von denen einer projektiven Ebene?

b) Zeigen Sie, dass für jede (n_r, m_k)-Konfiguration $n \cdot r = m \cdot k$ gilt.

c) Betrachten Sie m Geraden in der reellen Ebene in allgemeiner Lage und alle Schnittpunkte dieser Geraden. Welche Konfigurationen (also welche n, r, k) ergeben sich?

d) Betrachten Sie n Punkte in der reellen Ebene in allgemeiner Lage und alle davon aufgespannten Geraden. Welche Konfigurationen ergeben sich?

e) Vervollständigen Sie die folgende Skizze zu einer $(8_3, 8_3)$-Konfiguration.



f) Finden Sie eine $(13_4, 13_4)$-Konfiguration.

★g) Finden Sie weitere (n_r, m_k)-Konfigurationen.

<u>Lösung:</u>

Fehler: Die Angabe sollte verlangen, dass die Punkte bzw. Geraden unterschiedlich sind, also in (i) $p \neq q$ und in (ii) $l \neq m$.

a) Zum eine verlangen die Axiome einer (n_r, m_k)-Konfiguration *höchstens eine* Verbindungsgerade, nicht *genau eine*. Das gleiche gilt für Schnittpunkte. Aus diesem Grund sind Schnitt und Verbindung keine vollständig definierten Operationen in derartigen Konfigurationen.

   Zum zweiten ist für allgemeine (n_r, m_k)-Konfiguration kein Reichhaltigkeits-Axiom vorgegeben, man könnte also durchaus von $(0_3, 0_{42})$-Konfigurationen reden. An der Stelle sei bemerkt, dass allquantifizierte Aussagen über leeren Mengen immer wahr sind: Wenn es keine Punkte gibt, so liegt jeder dieser 0 Punkte auf 3 Geraden. Das Gegenteil, nämlich dass es einen Punkt gibt der nicht auf 3 Geraden liegt, ist mangels der Existenz eines Punktes falsch.

b) Es gilt $n \cdot r = |\mathcal{I}| = m \cdot k$. Die beiden Seiten der Gleichungen beschreiben also die Zahl der Inzidenzen, also der Paare aus jeweils einem Punkt und einer dazu inzidenten Geraden. Da jeder der n Punkte zu r Geraden inzident ist, gibt es $n \cdot r$ solche Paare. Umgekehrt gibt es für jede der m Geraden k verschiedene Punkte, mit denen sie Paare in der Inzidenzrelation bildet.

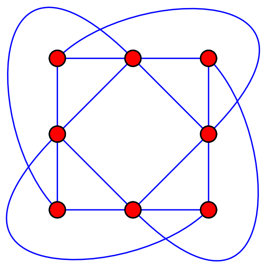
   Wenn man sich die Inzidenzrelation als Matrix darstellt, mit Spalten für Punkte und Zeilen für Geraden, dann hat diese Matrix n Spalten mit je r EInträgen, gleichzeitig aber m Zeilen mit je k Einträgen. Da die Summe der Einträge in der gesamten Matrix unabhängig von der Zählweise ist, müssen diese beiden Zahlen übereinstimmen.

c) Wenn die Geraden in allgemeiner Lage liegen, verlaufen keine drei von Ihnen durch einen Punkt. Daher ist jeder Schnittpunkt inzident zu genau $r = 2$ Geraden. Da auch parallele Geraden eine spezielle Lage darstellen, schneiden sich alle Geraden, so dass auf jeder Geraden $k = m - 1$ Schnittpunkte liegen. Nach Teilaufgabe b) ergeben sich somit $n = \frac{m \cdot k}{r} = \frac{m \cdot (m-1)}{2} = \binom{m}{2}$ Schnittpunkte insgesamt.

d) In allgemeiner Lage liegen keine drei Punkte auf einer Geraden, weshalb jede Verbindungsgerade zu nur $k = 2$ Punkten inzident ist. Jeder der n Punkte wird also über $r = n - 1$ verschiedene Verbindungsgeraden mit allen anderen Punkten verbunden. Demnach gibt es insgesamt $m = \frac{n \cdot r}{k} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ Verbindungsgeraden.

e) Eine erste naheliegende Ergänzung der Zeichnung ist es, vier tatsächlich gerade Geraden einzuzeichnen, die die äußeren Punkte zu einem Quadrat verbinden. Auf jeder dieser Geraden liegen bereits die geforderten drei Punkte. Die vorgegebenen Linien haben jeweils noch einen Punkt zu wenig, und durch die Ecken des äußeren Quadrates verläuft jeweils noch eine Gerade zu wenig. Es muss also jede vorgegebene Linie durch noch einen Eckpunkt verlängert werden.

Da jede vorgegebene Linie bereits zwei Seitenmitten enthält, und diese zwei Seitenmitten zusammen zu drei Eckpunkten adjazent sind, kommen diese Eckpunkte als Ergänzung der schrägen Linie nicht mehr in betracht, da es sonst zwischen zwei Punkten mehr als eine Verbindungsgerade gäbe. Damit ist klar, dass jede schräge Linie mit der gegenüberliegenden Ecke verbunden werden muss.



f) Die projektive Ebene der Ordnung 3, $\mathbb{F}_3\mathbb{P}^2$, hat genau diese Kombinatorik.

g) Es gibt viele Möglichkeiten, um auf weitere projektive Ebenen zu kommen.

- Jede endliche projektive Ebene ist eine (n_r, n_r)-Konfiguration.
- Die Hausaufgaben zeigen einige Möglichkeiten, wie man (n_r, m_k)-Konfigurationen erzeugen kann, etwa durch Projektion höherdimensionaler Konfigurationen oder ausgehend von der Kombinatorik platonischer Körper.
- Man kann sich n vorgeben und diese n Punkte gleichmäßig verteilt auf einen Kreis zeichnen. Eine Gerade, die k dieser Punkte verbindet, entspricht einem (nicht unbedingt regelmäßigen) k-gon in diesem Kreis. Wenn man sich für ein fixes k eine Menge solcher Polygone vorgibt, und von jedem auch alle in Schritten von $\frac{2\pi}{n}$ gedrehten Kopien einzeichnet, dann müssen aufgrund der Symmetrie auch alle Punkte zu gleich vielen Geraden inzident sein. Man kann auch ein Vielfaches dieser Schrittweite wählen, solange durch die Form des Polygons sichergestellt ist, dass dennoch jeder Punkt in gleich vielen Kopien auftritt. Wichtig ist, dass jede Verbindung zwischen zwei Punkten in höchstens einem Polygon auftreten darf, um die Axiome für (n_r, m_k)-Konfigurationen zu erfüllen.

— *Hausaufgaben*—

Aufgabe 3. Abzählen

Die Zahl der Punkte und Geraden einer projektiven Ebene über einem Körper mit n Elementen beträgt

$$n^2 + n + 1 = \frac{n^3 - 1}{n - 1}$$

a) Zeigen Sie, dass obige Gleichung stimmt.

b) Geben Sie für die beiden Seiten der Gleichung unterschiedliche Argumentationen an, wie man auf diese Zahl kommt.

c) Verallgemeinern Sie diese Gleichung für beliebige Dimension d, also für den projektiven Raum $\mathbb{KP}^d$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| = n$.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Man kann beide Seiten der Gleichung mit $(n-1)$ multiplizieren. Dann erhält man

$$(n^2+n+1)(n-1) = (n^3+n^2+n) - (n^2+n+1) = n^3 + (n^2 - n^2) + (n-n) - 1 = n^3 - 1$$

b) Die rechte Seite ergibt sich direkt aus der Quotientengruppe, mit der die Menge $\mathcal{P}$ beschrieben wird:

$$\mathcal{P} = \frac{\mathbb{K}^3 \setminus \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}}{\mathbb{K} \setminus \{0\}}$$

Bei einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| = n$ ist die Zahl der Dreielementigen Vektoren $\left|\mathbb{K}^3\right| = n^3$. Von diesen schließt man den Nullvektor aus und gelangt so zu $(n^3 - 1)$ möglichen Repräsentanten für Punkte. Von diesen werden die von Null verschiedenen skalaren Vielfachen identifiziert. Da der Körper n Elemente hat und eines davon die Null ist, bleiben $(n-1)$ derartige Vielfache für jeden Punkt. Jeder Punkt hat also in den (n^3-1) Vektoren immer $(n-1)$ verschiedene Repräsentanten.

Die linke Seite kann man durch Aufspalten der projektiven Strukturen in Affine Strukturen und einen Rand bekommen. Die Projektive Ebene ist eine affine Ebene plus eine projektive Ferngerade. Eine projektive Gerade ist eine affine Gerade plus ein Fernpunkt. Eine affine Ebene über einem Körper der Charakteristik n hat n^2 Punkt. Eine affine Gerade entsprechend n, und ein einzelner Punkt nur 1. Macht in Summe $n^2 + n + 1$. Dies entspricht auch der Aufteilung der Äquivalenzklassen in n^2, die Repräsentanten der Form $(x, y, 1)^T$ haben, und n mit Repräsentanten der Form $(x, 1, 0)^T$ sowie 1 mit Repräsentant $(1, 0, 0)$. Der Exponent nach dem n entspricht jeweils genau der Zahl der Variablen, die nach der Normierung noch in dem Repräsentantenvektor verbleiben.

$$\left| \left\{ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right] \;\middle|\; x, y \in \mathbb{K} \right\} \right| = n^2 \qquad \left| \left\{ \left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \;\middle|\; x \in \mathbb{K} \right\} \right| = n \qquad \left| \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \right| = 1$$

Die linke Seite kann man ebenfalls erklären durch abzählen der $n+1$ Geraden durch einen gegebenen Punkt p, multipliziert mit den n von p verschiedenen Punkten auf jeder dieser Geraden. Diese Argumentation ist etwas schwerer auf höhere Dimensionen zu übertragen.

c) Für die rechte Seite haben die Repräsentantenvektoren jeweils $d+1$ Elemente, was den Exponenten im Zähler bestimmt. Auf der Linken Seite ergeben sich $d+1$ affine Gebilde, beginnend mit dem d-dimensionalen affinen Raum bis hinunter zum 0-dimensionalen Punkt. Damit lautet die Gleichung allgemein:

$$\sum_{r=0}^{d} n^r = \frac{n^{d+1} - 1}{n - 1}$$

Auch diese Gleichung lässt sich mit dem Verfahren aus Teilaufgabe a) leicht beweisen.

Aufgabe 4. Teilmengen-Konfigurationen

Gegeben sei eine Grundmenge A mit a Elementen. Fassen Sie alle dreielementigen Teilmengen davon als Punkte auf, und alle zweielementigen Teilmengen als Geraden. Inzidenz sei über Mengeninklusion definiert.

$$\mathcal{P} := \{p \subset A \mid |p| = 3\} \qquad \mathcal{L} := \{l \subset A \mid |l| = 2\} \qquad p\mathcal{I}l := l \subset p$$

a) Was für eine Konfiguration erhalten Sie für $a = 3$? Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration an, und beschriften Sie diese.

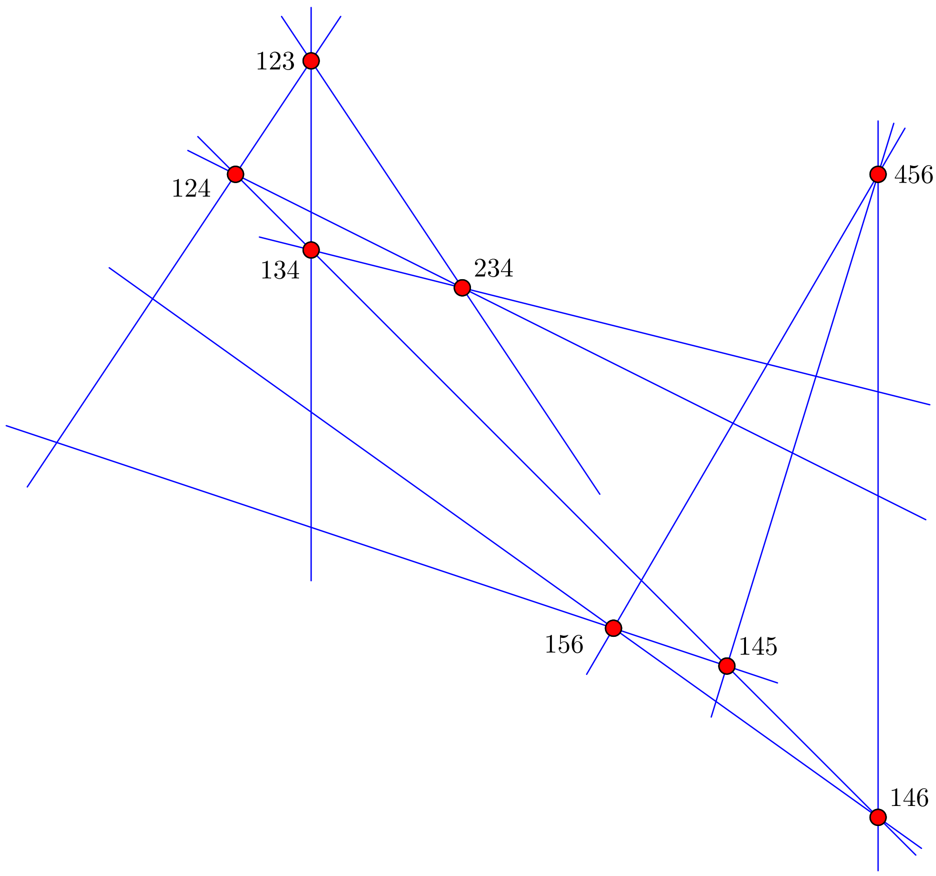
b) Benennen Sie auch die Konfiguration, die sich für $a = 4$ ergibt, und fertigen Sie eine beschriftete Skizze dieser Konfiguration an.

c) Was für eine Konfiguration ergibt sich für $a = 5$? Was ist besonders an dieser Situation?

d) Können Sie die Konfiguration für $a = 5$ so zeichnen, dass Geraden und Punkte im Sinne der Konfiguration tatsächlich als Geraden und Punkte der euklidischen Ebene erscheinen?

e) Was hat die Konfiguration mit $a = 5$ mit dem Satz von Desargues zu zun?

f) Ergänzen und beschriften Sie die folgende Zeichnung so, dass sie eine Konfiguration für $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ widerspiegelt.



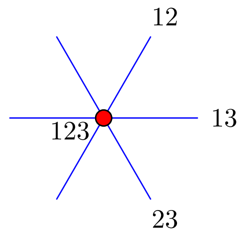
Hinweis: Die Punkte der Angabe lassen sich exakt auf 5mm Karopapier übertragen.

g) Bezeichnen Sie die Konfiguration, die man im allgemeinen Fall erhält, also für ein beliebiges a.

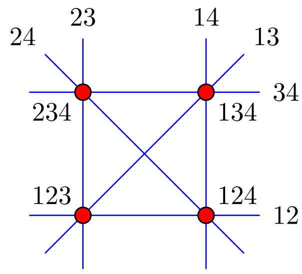
h) Beschreiben Sie diese Konfigurationen als Projektionen von höherdimensionalen Objekten.

Lösung:

a) Es entsteht die nachfolgende $(1_3, 3_1)$-Konfiguration.

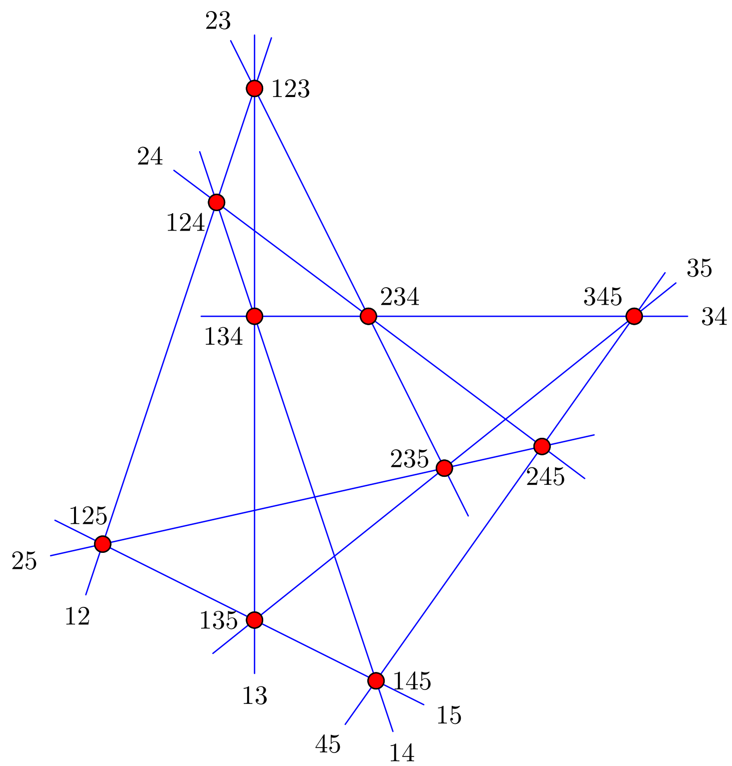


b) Es entsteht die nachfolgende $(4_3, 6_2)$-Konfiguration.



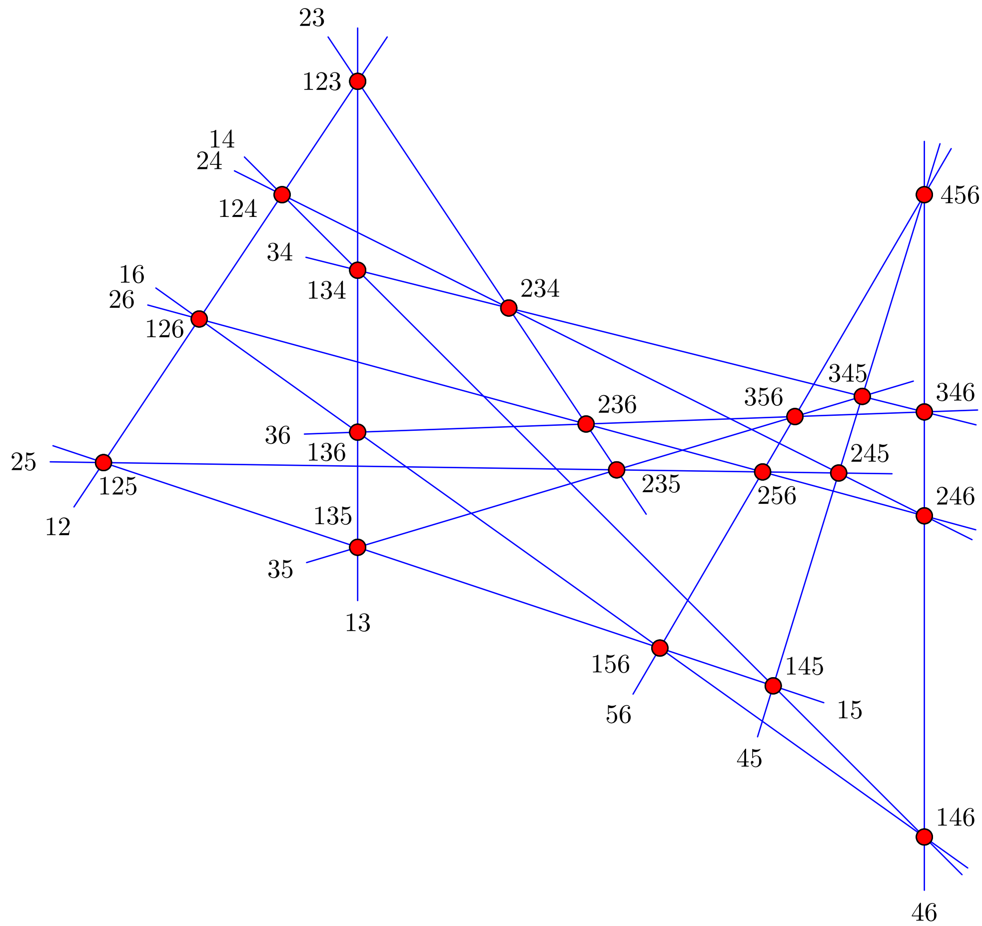
c) Es entsteht eine $(10_3, 10_3)$-Konfiguration. Auffällig ist bei dieser Konfiguration die Tatsache, dass es gleich viele Punkte und Geraden gibt, und sich so eine (n_r, n_r)-Konfiguration (abgekürzt auch als n_r-Konfiguration bezeichnet) ergibt. Die Konfiguration ist sogar zu sich selbst dual, was man leicht erkennen kann, wenn man für jeden Punkte $p \in \mathcal{P}$ die komplementäre Menge $A \setminus p \in \mathcal{L}$ schreibt und umgekehrt. Dieser Übergang zu den Komplementen erhält Inzidenzen, womit die Dualität der Inzidenzrelation gegeben ist.

d) Die Konfiguration lässt sich leicht in die Ebene einbetten, da der Satz von Desargues bereits garantiert, dass wenn bei der Konstruktion alle Inzidenzen bis auf eine berücksichtigt werden, dass dann auch diese letzte Inzidenz automatisch erfüllt wird, wie es die Konfiguration erfordert. Ein mögliches Bild wäre dieses:



e) Die angegebene 10_3-Konfiguration ist genau die Konfiguration des Satzes von Desargues. Wenn also alle Inzidenzen bis auf eine erfüllt sind, so ist diese letzte Inzidenz zwangsläufig auch erfüllt. Diese Aussage gilt in allen projektiven Ebenen, in denen der Satz von Desargues gilt.

f) Die vollständige Konfiguration sieht so aus:



g) Für ein beliebiges a erhält man eine (n_r, m_k)-Konfiguration mit

$$n = \binom{a}{3} \qquad m = \binom{a}{2}$$
$$r = 3 \qquad k = a - 2$$

Zur Probe kann man nachprüfen, dass die Zahl der Inzidenzen übereinstimmt:

$$|\mathcal{I}| = n \cdot r = \binom{a}{3} \cdot 3 = \frac{a!}{3!(a-3)!} \cdot 3 = \frac{a!}{2!(a-3)!} = \frac{a!}{2!(a-2)!} \cdot (a-2) = \binom{a}{2} \cdot (a-2) = m \cdot k$$

h) Man kann sich diese Konfigurationen vorstellen als Schnittfiguren von Ebenen im dreidimensionalen affinen Raum, wobei die Ebenen untereinander sowie zur Zeichen- bzw. Projektionsebene in allgemeiner Lage liegen.

In diesem Fall schneiden sich je drei der Ebenen in einem Punkt, und je zwei der Ebenen in einer Geraden. Die Projektionen von Punkten und Geraden in die Zeichenebene sind dann wieder Punkte und Geraden. Die Teilmengen, mit denen Punkte und Geraden beschrieben werden, bezeichnen die am jeweiligen Schnitt beteiligten Ebenen.

Aufgabe 5. Axiomatisches

Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ist eine projektive Ebene genau dann wenn die folgenden Axiome gelten:

(i) Für $p, q \in \mathcal{P}, p \neq q$ existiert genau ein $l \in \mathcal{L}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $q\mathcal{I}l$

(ii) Für $l, m \in \mathcal{L}, l \neq m$ existiert genau ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $p\mathcal{I}m$

(iii) Es gibt $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ so dass keine drei davon inzident zur selben Geraden sind.

Zeigen Sie allein mit Hilfe dieser Axiome, dass die folgenden Aussagen in jeder projektiven Ebene gelten:

a) Zu jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ gibt es eine Gerade $l \in \mathcal{L}$, die nicht inzident zu p ist.

b) Für zwei Geraden $l, m \in \mathcal{L}$ sind die Mengen der dazu inzidenten Punkte gleich mächtig:

$$|\{p \in \mathcal{P} \mid p\mathcal{I}l\}| = |\{q \in \mathcal{P} \mid q\mathcal{I}m\}|$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde an dieser Stelle eine Ungleichung gezeigt, mit dem Hinweis, dass die Gegenrichtung analog sei und daher Gleichheit gelte. Das stimmt so allerdings nur für endliche Mengen. Um auch unendliche Mengen sauber zu behandeln, müssen Sie eine Bijektion definieren, um deren Kardinalität zu vergleichen.

c) Bei endlichen projektiven Ebenen ist die Zahl der Punkte und die Zahl der Geraden stets gleich.

Hinweis: Einige dieser Aussagen haben Sie so oder so ähnlich schon in der Vorlesung gezeigt bekommen. Es ist nicht Sinn dieser Aufgabe, den Beweis aus der Vorlesung wörtlich abzuschreiben. Machen Sie sich statt dessen die relevanten Argumente noch einmal selber bewusst, und formulieren Sie den Beweis so wie Sie selbst ihn am besten nachvollziehen können.

<u>LÖSUNG:</u>

Die nachstehenden Beweise verwenden bewusst keine der in der Vorlesung bewiesenen Lemmata, da die Aufgabenstellung ja explizit einen Beweis „allein mit Hilfe der Axiome" verlangt. Manche Teilergebnisse entsprechen Lemmata in der Vorlesung, auch wenn die Beweise mitunter anders geführt wurden, um alternative Ansätze zu demonstrieren.

a) Beweis:

1. Man geht aus von den vier Punkten a bis d, deren Existenz nach Axiom (iii) gesichert ist.
2. Wegen Axiom (i) kann man deren Verbindungsgeraden betrachten, etwa $g = a \vee b$ und $h = b \vee c$.
3. Der Schnitt dieser beiden Geraden ist wegen Axiom (ii) eindeutig, und da b aufgrund der Definition dieser Verbindungsgeraden zu beiden inzident sein muss, ist b zugleich auch ihr Schnittpunkt, also $g \wedge h = b$.
4. Falls $p \neq b$ ist, kann also höchstens eine der beiden Geraden g und h durch p verlaufen, nicht aber alle beide. Mindetens eine der beiden Geraden ist also nicht inzident zu p, und kann daher als l verwendet werden.
5. Falls $p = b$ ist, kann man $l = c \vee d$ wählen. Denn angenommen, $p = b$ wäre inzident zu diesem l, dann wären die Punkte b, c und d alle zur selben Geraden inzident, was ein Widerspruch zu (iii) ist.

b) Um zu zeigen, dass zwei (möglicherweise unendliche) Mengen gleiche Mächtigkeit haben, muss eine Bijektion zwischen den Elementen dieser Mengen gefunden werden. Dies ist ein Unterschied zum Beweis in der Vorlesung, bei dem nur endliche Mengen betrachtet wurden und daher zwei injektive Abbildungen ausreichend waren. (Mit dem Äquivalentsatz von Cantor, Bernstein und Schröder reichen dann doch wieder zwei Injektionen aus, um die Existenz einer Bijektion zu beweisen. Aber nachdem die Aufgabe explizit eine Bijektion verlangt, und das nicht soo schwer ist, sollte man sich hier schon die Mühe machen, eine solche auch explizit anzugeben.)

1. Es gibt einen Punkt p, der weder auf l noch auf m liegt.

   1.1. Nach Axiom (iii) existieren a bis d, und da keine 3 davon auf einer Geraden liegen, können zu jeder der Geraden l und m höchstens zwei dieser Punkte inzident sein.

   1.2. Falls nicht zu beiden Geraden je zwei dieser Punkte inzident sind, gibt es einen dieser Punkte, der zu keiner Geraden inzident ist. Nenne diesen p, und weiter bei 2.

   1.3. Falls zu jeder Gerade zwei der Punkte inzident sind, bezeichne diese o.B.d.A. so, dass $l = a \vee b$ und $m = c \vee d$. Die Beschreibung der Geraden auf diese Weise ist nach (i) eindeutig.

1.4. Die Verbindungsgeraden $g = a \vee c$ und $h = b \vee d$ existieren nach (i) ebenfalls.

1.5. g, h, l und m sind paarweise verschieden. Jede dieser vier Geraden wird durch zwei der Punkte a bis d definiert, und wenn zwei davon gleich wären, würde diese Gerade drei dieser Punkte enthalten, im Widersprich zu (iii).

1.6. Der Punkt $p = g \wedge h$ existiert nach (ii).

1.7. p liegt nicht auf l oder m. Das kann man über einen Widerspruchsbeweis zeigen:

  1.7.1. O.B.d.A. angenommen, dass p auf l liegt. Gemäß seiner definition liegt er außerdem auf g.

  1.7.2. l und g haben nach ihrer Definition den Punkt a gemeinsam, und nach Axiom (ii) ist dieser Schnittpunkt eindeutig. Es wäre also $p = a$.

  1.7.3. Da p gemäß Definition auch auf h liegt, und $h = b \vee d$ ist, lägen damit die Punkte a, b, d auf einer Geraden, was nach (iii) nicht sein kann.

Somit ist in jedem Fall ein Punkt p gefunden, der außerhalb von l und m liegt.

2. Projektion der Geraden aufeinander mit dem Punkt p als Zentrum definieren eine bijektive Abbildung f zwischen den beiden Geraden, oder genauer gesagt, zwischen den Punkten beider Geraden.

  2.1. Für jeden Punkt r mit $r\mathcal{I}l$ existiert die eindeutige Verbindungsgerade $h = r \vee p$ nach (i).

  2.2. Da p wie eben gezeigt nicht auf l liegt, ist $r \neq p$ und somit (i) wirklich anwendbar und diese Verbindungerade tatsächlich definiert. Außerdem ist damit $h \neq l$ und $h \neq m$.

  2.3. Die Verbindungsgerade h schneidet m in einem nach (ii) eindeutigen Schnittpunkt $s = h \wedge m$.

  2.4. Definiere $f(r) = s$.

  2.5. Nach Axiom (i) ist h auch die einzige Gerade, die s und p enthält. Daher ist f injektiv.

  2.6. Nach Axiom (i) gibt es zu jedem Punkt s auf m eine Verbindungsgerade $h = s \vee p$.

  2.7. Nach Axiom (ii) schneidet jede dieser Verbindungsgeraden auch l in einem entsprechenden Punkt $r = h \wedge l$, mit $f(r) = s$ entsprechend obiger Definition. Daher ist f surjektiv.

  2.8. Somit ist f bijektiv.

3. Daher sind die Mengen der zu den beiden Geraden inzidenten Punkte gleich mächtig.

c) Der Beweis verwendet die Ergebnisse der vorherigen Aufgabenteile, und gibt die Zahl der Punkte und Geraden konkret an.

1. Nach Teilaufgabe b) gibt es auf jeder Geraden die gleiche Anzahl von Punkten. Nennen wir diese Zahl $n + 1$, so dass die Ordnung der Ebene wie üblich n ist.

   Beachte: Dass es so etwas wie eine „Ordnung“ gibt, und wie sich daraus die Zahl der Elemente errechnet, steht nicht in den Axiomen und darf daher nicht direkt verwendet werden.

2. Die Zahl der Punkte in der Ebene beträgt $n^2 + n + 1$.

  2.1. Wegen Axiom (iii) gibt es drei Punkte a, b und c, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

  2.2. Wegen (i) existiert die Verbindungsgerade $l = b \vee c$.

  2.3. Wegen Axiom (iii) liegt a nicht auf l.

  2.4. Nach Teilaufgabe b) und obiger Definition liegen auf l genau $n + 1$ Punkte, hier als p_i bezeichnet.

  2.5. Nach Axiom (i) gibt es zu jedem dieser Punkte eine Verbindungsgerade $h_i = p_i \vee a$.

  2.6. Die h_i sind paarweise verschieden. Andernfalls lägen zwei Punkte p_i und p_j zusammen mit a auf einer Geraden, was nicht sein kann, da $l = p_i \vee p_j$ nach (i) eindeutig ist und oben gezeigt wurde, dass p nicht auf l liegt.

  2.7. Auf jeder dieser $n + 1$ Geraden h_i liegen nach b) $n + 1$ Punkte.

  2.8. Bis auf den allen Geraden gemeinsamen Punkt a haben die h_i paarweise keine weiteren gemeinsamen Punkte. Andernfalls würden durch a und diesen weiteren gemeinsamen Punkt zwei verschiedene Geraden verlaufen, im Widerspruch zu (i).

  2.9. Nach Axiom (ii) schneidet jede Gerade, die durch a läuft, die Gerade l in einem eindeutigen Schnittpunkt p_i. Es gibt also außer den eben genannten $n + 1$ Geraden h_i keine weiteren Geraden durch a.

  2.10. Für jeden von a verschiedenen Punkt der Ebene gibt es nach (i) eine Verbindungsgerade dieses Punktes mit a.

  2.11. Da durch a nur die $n+1$ Geraden h_i verlaufen, muss jeder von a verschiedene Punkt also auf einer dieser Geraden liegen.

  2.12. Daher gibt es in der Ebene den Punkt a sowie $n(n + 1)$ weitere Punkte, nämlich für jede der $n + 1$ Geraden h_i genau n von a verschiedene Punkte.

2.13. Somit beträgt die Gesamtzahl der Punkte in der Ebene $n^2 + n + 1$.

3. Die Zahl der Geraden in der Ebene beträgt $n^2 + n + 1$. Der Beweis baut auf den für die Gesamtzahl der Punkte auf und ist einfach dessen Duales.

    3.1. Jede von l verschiedene Gerade der Ebene muss nach (ii) die Gerade l in einem ihrer Punkte p_i schneiden.

    3.2. Durch jeden der Punkte p_i auf l verlaufen $n + 1$ Geraden, wie noch zu zeigen ist. Das sind die Gerade l selbst sowie n andere Geraden.

    3.3. Außer l läuft keine Gerade durch mehr als einen dieser p_i, wegen Axiom (i).

    3.4. Daher gibt es in der Ebene die Gerade l sowie $n(n + 1)$ weitere Geraden, nämlich für jeden der $n + 1$ Punkte p_i genau n von l verschiedene Geraden.

    3.5. Somit beträgt die Gesamtzahl der Geraden in der Ebene $n^2 + n + 1$.

4. Es steht noch der Beweis aus, dass durch jeden Punkt der Ebene $n + 1$ Geraden verlaufen.

    4.1. Für jeden Punkt p gibt es nach Teilaufgabe a) eine Gerade l, die nicht inzident zu p ist.

    4.2. Auf l liegen nach Teilaufgabe b) $n + 1$ Punkte.

    4.3. Zu jedem dieser $n + 1$ Punkte gibt es nach (i) eine Verbindungsgerade mit p, die also durch p läuft.

    4.4. Umgekehrt gibt es nach (ii) keine Gerade durch p, die l nicht schneidet.

    4.5. Deswegen existiert eine Bijektion zwischen den $n + 1$ Punkten auf l und den Geraden durch p, so dass deren Zahl auch $n + 1$ betragen muss.

5. Da sowohl die Zahl der Punkte als auch die Zahl der Geraden $n^2 + n + 1$ beträgt, ist diese Zahl offenbar gleich.