Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Aufgabenblatt 11 (7. Juli 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Projektivspiegelung

In dieser Aufgabe sollen euklidische Spiegelungstransformationen auf andere Geometrien verallgemeinert werden.

a) Auf der projektiven Geraden $\mathbb{RP}^1$ seien die Punkte ∞, a und $(a+b)$ vorgegeben. Wie können Sie den Punkt $(a-b)$ konstruieren, also quasi das Spiegelbild von $(a+b)$ an a?

b) Das Spiegelbild P' eines Punktes P an einer Geraden g kann in der euklidischen Ebene mit den folgenden Schritten konstruiert werden:

1. Man bestimme die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch P verläuft.
2. Man bestimme denjenigen Punkt P' auf h, der vom Schnitt dieser beiden Geraden gleich weit weg ist wie P, aber auf der anderen Seite liegt.

Konkretisieren Sie diese Konstruktionsbeschreibung so, dass klar wird, *wie* diese Schritte jeweils zu erreichen sind. Beschränken Sie sich dabei auf Werkzeuge, die sich auf andere Geometrien übertragen lassen: Schnittpunkt, Verbindungsgerade, harmonische Lage sowie Tangente, Polare und Pol bezüglich des Fundamentalgebildes. Nehmen Sie außer durch die drei letztgenannten Operationen keinerlei Bezug auf das Fundamentalgebilde.

c) Überlegen Sie sich eine entsprechende Konstruktionsmethode, mit der eine Punktspiegelung konstruiert werden kann. Verwenden Sie dabei wieder nur den in der vorangegangenen Teilaufgabe beschriebenen Satz von Werkzeugen.

d) Beschreiben Sie eine allgemeine Klasse von Transformationen (im Folgenden als „Projektivspiegelungen“ bezeichnet), die euklidische Spiegelungen an einer Gerade sowie an einem Punkt als Spezialfälle enthält. Jedes Element dieser Klasse soll durch einen Punkt und eine Gerade beschrieben werden, und die Transformationen dieser Klasse sollen keinen Bezug mehr auf irgendwelche Fundamentalgebilde nehmen.

e) Begründen Sie kurz, warum jede Projektivspiegelung eine Involution ist, warum also die doppelte Ausführung wieder die Identität darstellt.

f) Durch wie viele Paare aus Urbild- und Bild-Punkten wird eine Projektivspiegelung im Allgemeinen eindeutig definiert?

g) Zeigen Sie, dass jede Projektivspiegelung eine projektive Transformation ist.

h) Welche Bedingung muss für den Punkt und die Gerade mit Bezug auf das Fundamentalgebilde $\mathcal{K}$ gelten, damit man die Abbildung als Spiegelungen im engeren Sinne einer konkreten Geometrie auffassen kann? Wählen Sie Ihre Einschränkung so, dass dadurch in der euklidischen Ebene lediglich Achs- und Punktspiegelung zugelassen werden. Orientieren Sie sich bei Ihrer algebraischen Formalisierung an der Definition von Primal-Dual-Paaren. Eine Projektivspiegelung, die diese Einschränkung erfüllt, soll im folgenden als „$\mathcal{K}$-Spiegelung“ bezeichnet werden.

i) Beschreiben Sie, was eine $\mathcal{K}$-Spiegelung in hyperbolischer Geometrie ist. Lassen sich auch in der hyperbolischen Symmetrie sowohl Achs- als auch Punktspiegelungen auf diese Weise darstellen?

j) Untersuchen Sie auch, welche Situation sich für eine $\mathcal{K}$-Spiegelung in elliptischer Geometrie ergibt. Stellen Sie sich diese Geometrie auf der Kugel vor. Wie sieht es dort mit der Unterscheidung zwischen Achs- und Punktspiegelungen aus?

k) Beweisen Sie zumindest für hyperbolische Geometrie, dass dort jede $\mathcal{K}$-Spiegelung Längen und Winkel erhält. Auf welche anderen Geometrien lässt sich dieser Beweis verallgemeinern?

★l) Beweisen Sie, dass jede Involution eine Projektivspiegelung ist.

★m) Beweisen Sie, dass die $\mathcal{K}$-Spiegelungen in jeder Cayley-Klein-Geometrie Längen und Winkel erhalten.

— ***Hausaufgaben***—

Aufgabe 2. Winkelhalbierende

In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass sich die Winkelhalbierenden im Dreieck in einer Cayley-Klein-Geometrie in einem Punkt schneiden. Sie dürfen davon ausgehen, dass dieses Dreieck nicht-degeneriert ist, dass die drei Eckpunkte also nicht kollinear sind.

Hinweis: Diese Fragestellung wurde auch in der Vorlesung behandelt. Versuchen Sie jedoch, die durch die Teilaufgaben angeleitete Argumentation nachzuvollziehen, unterstützt von dem was Sie von der Vorlesung im Kopf haben. Einfach den Beweis aus der Vorlesung anschauen und abzuschreiben bringt nichts.

a) Wie viele Möglichkeiten haben Sie, zu einem Paar von Geraden in euklidischer Geometrie eine Winkelhalbierende zu konstruieren?

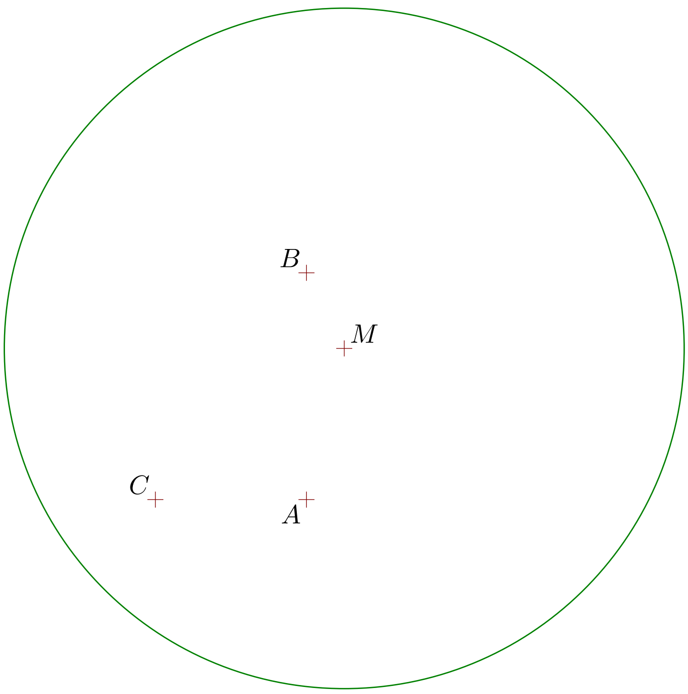
b) Zeichnen Sie ein hinreichend allgemeines Dreieck, und zeichnen Sie alle euklidischen Winkelhalbierenden zwischen Kanten ein, die an den Ecken auftreten. Wie viele von den Ecken verschiedene Punkte gibt es, durch die mehr als eine Winkelhalbierende verläuft, und wie viele Winkelhalbierende schneiden sich dort jeweils?

c) Gegeben seien zwei Geraden, die sich im Mittelpunkt eines Kreises schneiden. Beschreiben Sie, wie eine (euklidische) Winkelhalbierende konstruiert werden kann, und zwar ausschließlich unter Verwendung von Tangenten, Schnittpunkten und Verbindungsgeraden. Nutzen Sie dazu Symmetrien aus.

d) Gegeben seien zwei Geraden, die sich irgendwo im Inneren des fundamentalen Kegelschnitts schneiden. Beschreiben Sie eine Konstruktion, mit der eine hyperbolische Winkelhalbierende zu diesen beiden Geraden konstruiert werden kann.

e) Formulieren Sie Ihre Konstruktionsbeschreibung so um, dass in keinem Konstruktionsschritt der Schnittpunkt der beiden ursprünglichen Geraden verwendet wird.

f) In der folgenden Abbildung ist das Fundamentalgebilde der hyperbolischen Geometrie ein Kreis mit Mittelpunkt M. Konstruieren Sie (mit Geodreieck und ggf. Zirkel) in der folgenden Abbildung die drei Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks ABC, also jeweils die Winkelhalbierende, die durch das Innere des Dreiecks verläuft.



g) Überprüfen Sie, dass sich diese diese drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden.

h) Beweisen Sie, warum sich diese Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden müssen. Erinnern Sie sich dabei an einen Satz, der sechs Tangenten an einen Kegelschnitt in seinen Voraussetzungen enthält. Wenn Ihnen kein solcher Satz einfällt, hilft vielleicht Dualisieren, um sich diesen wieder herzuleiten.

i) In welchem Umfang lässt sich diese Konstruktion der Winkelhalbierenden auf andere Geometrien übertragen? Ist der Beweis dann ebenfalls noch anwendbar?