Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Aufgabenblatt 10 (30. Juni 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Eine konkrete Cayley-Klein-Geometrie

a) Bestimmen Sie zu dem folgenden dualen Kegelschnitt B den zugehörigen primalen Kegelschnitt A.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Untersuchen Sie, ob durch das Primal-Dual-Paar (A, B) beschriebene Kegelschnitt degeneriert ist oder nicht.

Falls er degeneriert ist, geben Sie für die Komponenten, in die er zerfällt, konkrete Koordinaten an, und zwar sowohl primal als auch dual.

c) Der Kegelschnitt (A, B) soll jetzt als Fundamentalgebilde einer Cayley-Klein-Geometrie verwendet werden. Beschreiben Sie die Maßbestimmungen, die sich dadurch für Distanzen und Winkel ergeben, jeweils als „hyperbolisch“, „parabolisch“ oder „elliptisch“.

d) Es sei $c_{\text{ang}} = \frac{1}{2}$. Charakterisieren sie, unter welchen Umständen der Winkel zwischen zwei Geraden reell ist.

e) Das am einfachsten zu konstruierende Doppelverhältnis ist die harmonische Lage. Benutzen Sie diese, um in einem Koordinatensystem, in dem der Kegelschnitt (A, B) eingezeichnet ist, zwei Geraden zu konstruieren, die miteinander einen wohldefinierten und reellen Winkel einschließen. Geben Sie den Wert dieses Winkels an.

f) Diskutieren Sie, was eine geeignete Wahl für den Skalierungsfaktor c_{dist} der Längenmessung ist.

g) Können Sie zwei Punkte konstruieren, die den Abstand 2 von einander haben?

Falls ja, führen Sie diese Konstruktion aus.

h) Können Sie zu zwei vorgegebenen Punkten den Mittelpunkt konstruieren, also den Punkt, der von beiden bezüglich der Maßbestimmung dieser Geometrie den gleichen Abstand hat?

Wenn ja, geben Sie sich selbst zwei hinreichend allgemeine Punkte vor und führen Sie die Konstruktion aus.

Aufgabe 2. Kreisabbildungen

Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

All diese Punkte liegen offensichtlich auf dem Einheitskreis. Gesucht sind jetzt verschiedene Abbildungen, die den Einheitskreis invariant lassen und A auf A' abbilden, B auf B' und C auf C'. Zunächst sollen Sie nur den Rechenweg angeben, die konkrete Berechnung kommt dann als Hausaufgabe.

a) Interpretieren Sie die reellen Koordinaten als Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl, die Sie als Punkt in $\mathbb{CP}^1$ auffassen können. Geben Sie an, mit welchen Schritten sich eine *projektive Transformation* entsprechend der obigen Kriterien berechnen können.

b) Neben der eben angegebenen projektiven Transformation gibt es in $\mathbb{CP}^1$ noch eine weitere *harmonische Abbildung*, die keine projektive Transformation ist und dennoch alle geforderten Bedingungen erfüllt. Geben Sie auch diese an.

c) Betten Sie die angegebenen reellen Punkte jetzt in den $\mathbb{RP}^2$ ein. Auch hier gibt es eine projektive Transformation, die die geforderten Eigenschaften aufweist. Überlegen Sie sich, wie sie diese bestimmen können.

— *Hausaufgaben*—

Aufgabe 2. Kreisabbildungen (Fortsetzung)

Diese Aufgabe ist die Fortsetzung der vorangegangenen Präsenzaufgabe. Hier sollen die jeweils geforderten Abbildungen konkret berechnet werden.

d) Berechnen Sie die projektive Transformation in $\mathbb{CP}^1$.

e) Berechnen Sie die andere harmonische Abbildung in $\mathbb{CP}^1$.

f) Berechnen Sie die projektive Abbildung in $\mathbb{RP}^2$.

g) Wenden Sie alle drei Abbildungen an auf den Punkt

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Geben Sie das jeweilige Ergebnis wieder dehomogenisiert als Punkt in $\mathbb{R}^2$ an.

Versuchen Sie, so weit wie möglich durch Kopfrechnen zu kommen. Anschließend können Sie den Computer verwenden, um Ihre Berechnungen entweder abzuschließen oder zu überprüfen. Machen Sie in Ihrer Abgabe deutlich kenntlich, wie weit Sie mit Kopfrechnen gekommen sind.

Aufgabe 3. Dualer Partner

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

sowie einige weitere Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) Entscheiden Sie, welche der Matrizen B_i zusammen mit A ein zulässiges Primal-Dual-Paar bilden. Begründen Sie Ihre Antwort durch eine geeignete Rechnung.

b) Stellen Sie die primalen und dualen Kegelschnitte auch grafisch dar, sowohl für die gültigen Paare als auch für die Matrizen, die keinen gültigen Partner zu A darstellen.

c) Beschreiben Sie, welche Cayley-Klein-Geometrie sich aus den zulässigen Paaren jeweils ergibt.

Aufgabe 4. Stark Degeneriert

a) Geben Sie sich einen degenerierten Kegelschnitt vor, bei dem sowohl primale als auch duale Matrix Rang 1 haben. Geben Sie die beiden Matrizen an, und zeichnen Sie den Kegelschnitt in ein Koordinatensystem ein.

b) Konstruieren Sie bezüglich der Cayley-Klein-Geometrie, die sich durch diesen Kegelschnitt ergibt, eine Folge von mindestens fünf äquidistanten Punkten auf einer beliebigen Geraden.

c) Konstruieren Sie durch einen beliebigen Punkt eine Büschel von mindestens fünf äquiangularen Geraden. Zwei aufeinanderfolgende Geraden des Büschels sollen also jeweils den gleichen Winkel mit einander einschließen.