Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014
`www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14`

Aufgabenblatt 8 (12. Juni 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Rationale Parametrisierung

Gegeben sei der Einheitskreis $\mathcal{C}$ sowie die Abbildung

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{RP}^2 \qquad f(t) := \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $f(t)$ für alle möglichen Parameter $t \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis liegt.

b) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f injektiv und/oder surjektiv ist. Sie müssen das nicht formal beweisen; es reicht wenn Sie dies in einem Gespräch überzeugend begründen könnten.

c) Erweitern Sie die Abbildung $f(t)$ zu einer homogenen Abbildung $F(t,u)$. Dabei soll $F(t,u) = f(\frac{t}{u})$ für $u \neq 0$ gelten. Für $u = 0$ aber $t \neq 0$ soll das Ergebnis ein Punkt in $\mathbb{RP}^2$ sein. Es soll also weder undefiniert noch der Nullvektor noch abhängig von t sein. Notieren Sie Ihr Ergebnis ohne Verwendung von Brüchen oder Fallunterscheidungen.

d) Ist die Abbildung $(t,u)^T \mapsto F(t,u)$ linear, wenn man sie als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ interpretiert? Falls ja, geben Sie die entsprechende Abbildungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ an.

e) Bestimmen Sie homogene Koordinaten für die Punkte

$$P_\infty = F(1,0) \qquad P_0 = F(0,1) \qquad P_1 = F(1,1) \qquad P_{-1} = F(-1,1)$$

Zeichnen Sie diese in eine Skizze des Einheitskreises ein.

f) Untersuchen Sie, ob die Abbildung F ein Isomorphismus des $\mathbb{RP}^1$ ist, ob also gilt:

$$\big(F(1,0), F(0,1); F(1,1); F(t,1)\big)_{\mathcal{C}} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}\right)$$

g) In dieser Teilaufgabe sei $A = f(t)$ und $B = f(0)$. Bestimmen Sie homogene Koordinaten für C, den (euklidischen) Mittelpunkt der Strecke AB. Bestimmen Sie außerdem homogene Koordinaten für die Gerade, die diesen Punkt C mit dem Ursprung $O = (0,0,1)^T$ verbindet. Welche Steigung hat diese Gerade? Verwenden Sie dieses Ergebnis, um mit Hilfe trigonometrischer Funktionen einen Zusammenhang herzustellen zwischen dem Parameter t, der den Punkt A definiert, und dem (orientierten) Winkel $\alpha = \angle BOA$ den dieser Punkt mit der Null-Position B einschließt.

h) Es sei $P = F(t,u)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis und $X = (x,y,z)^T$ ein beliebiger Punkt der projektiven Ebene. Die Verbindungsgerade $P \vee X$ schneidet $\mathcal{C}$ in einem weiteren (im Allgemeinen von P verschiedenen) Punkt Q. Geben Sie eine Formel für die homogenen Koordinaten dieses Punktes an, in Abhängigkeit von t, u, x, y, z. Schreiben Sie Ihr Ergebnis ohne Division als Linearkombination von X und P. Sie brauchen die Linearkombination nicht ausrechnen.

i) Zeichnen Sie diese Aufgabe auf 5 mm Karopapier, und verwenden Sie 10 Kästchengrößen als Längeneinheit. Zeichnen Sie einen Einheitskreis (der folglich 20 Kästchen Durchmesser haben sollte). Berechnen Sie die Positionen von $f(3)$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ und zeichnen Sie diese ein. Konstruieren Sie Summe und Produkt dieser beiden Punkte.

   Hinweis: Falls Sie keinen Zirkel zur Verfügung haben, so können Sie die Ergebnisse auch allein mit Ihrem Geodreieck ermitteln, indem sie dieses um den Ursprung drehen bis 5 cm-Marke auf der gewünschten Position liegt so dass dort ein Punkt auf dem Kreis eingezeichnet werden kann. Sie sollten sich jedoch für zukünftige Übungen einen Zirkel besorgen.

j) Berechnen Sie Koordinaten für $f\left(\frac{5}{2}\right)$ und $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ und überprüfen Sie, ob die eben konstruierten Punkte an den richtigen Positionen liegen.

k) Finden Sie mindestens 5 verschiedene Elemente der Menge

$$\left\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \;\middle|\; a^2 + b^2 = c^2, a < b < c, \mathrm{ggT}(a,b,c) = 1\right\}$$

l) Jetzt sei $A = f(a), B = f(b), C = f(c)$ und $D = f(d)$. Geben Sie homogene Koordinaten für die Tangenten an $\mathcal{C}$ in den Punkten A und B an, sowie homogene Koordinaten für die Gerade $C \vee D$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass sich diese drei Geraden genau dann in einem Punkt schneiden, wenn $(A, B; C, D)_{\mathcal{C}} = -1$ ist. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang durch Nachrechnen.

   Hinweis: Für $c = d$ ist die Verbindungsgerade nicht definiert. Nutzen Sie diesen Umstand, um einen möglichst einfachen Repräsentanten für diese Gerade zu finden. Auch der Fall $a = b$ ist Speziell, da dann die Tangenten zusammenfallen. Sie dürfen diese beiden Spezialfälle ausschließen und dadurch auch Ihre Berechnung vereinfachen.

— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 2. Hesses Übertragungsprinzip

Verwenden Sie Hesses Übertragungsprinzip, um in der nachfolgenden Zeichnung die Punkte $x + y$ sowie $x \cdot y$ bezüglich der projektiven Basis $0, 1, \infty$ zu konstruieren. Zu Ihrer Hilfe ist die Tangente an den Punkt ∞ bereits eingezeichnet, so dass diese nicht konstruiert werden muss.