Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014
`www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14`
Aufgabenblatt 7 (2. Juni 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Basis-Kegelschnitte

In dieser Aufgabe soll eine geeignete projektive Basis gefunden werden für die Menge aller Kegelschnitte, die durch die folgenden vier Punkte gehen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) In der Schar aller Kegelschnitte durch diese vier Punkte gibt es drei entartete Kegelschnitte. Fertigen Sie zu jedem davon eine kleine Skizze an.

   Hinweis: Bis einschließlich Teilaufgabe h) behandeln viele Teilaufgaben diese drei Kegelschnitte. Daher bietet sich eine dreispaltige Anordnung auf Ihrem Blatt an.

b) $\mathcal{K}_\lambda$ sei für $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert als der Kegelschnitt

$$\mathcal{K}_\lambda := \{E \mid (A, B; C, D)_E = \lambda\}$$

   Ordnen Sie den drei degenerierten Kegelschnitten, die sie eben skizziert haben, bezüglich dieser Definition die Bezeichnungen $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_\infty$ zu.

   Wenn Sie die Zuordnung nicht aus dem Stegreif treffen können, sehen Sie *nicht* in Ihrer Vorlesungsmitschrift nach, sondern überlegen Sie sich die Zuordnung über die Definition des Doppelverhältnisses, die Sie zu diesem Zweck am besten noch einmal notieren.

c) Weisen Sie nach, dass Ihre Zuordnung stimmt, dass sich also für Punkte E auf den drei Kegelschnitten jeweils wirklich das angegebene Doppelverhältnis ergibt.

d) Bestimmen Sie homogene Koordinaten für die in diesen degenerierten Kegelschnitten auftretenden Geraden.

e) Formulieren Sie exemplarisch für einen der drei degenertieren Kegelschnitte eine homogene quadratische Gleichung in den Variablen x, y und z.

f) Repräsentieren Sie jeden der drei degenerierten Kegelschnitte durch eine Matrix M_λ für $\lambda \in \{0, 1, \infty\}$.

g) Auf welche Weise dürfen Sie diese Matrizen verändern, ohne dass sich der dadurch beschriebene Kegelschnitt ändert?

h) Finden Sie mit Hilfe solcher Veränderungen drei geeignete Matrizen N_λ, die die gleichen Kegelschnitte $\mathcal{K}_\lambda$ beschreiben, aber zusätzlich auch die folgende Gleichung erfüllen:

$$N_1 = N_0 + N_\infty$$

i) Begründen Sie kurz, weshalb jede Linearkombination $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$ mit

$$N_{\alpha,\beta} := \alpha N_\infty + \beta N_0 \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

   einen Kegelschnitt durch die vier Punkte A, B, C, D darstellt.

j) Stellen Sie eine Vermutung an, wie man mit dieser Vorarbeit zu jedem beliebigen vorgegebenen Doppelverhältnis λ eine Matrix für den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{K}_\lambda$ bestimmen kann. Sie müssen diese Vermutung (noch) nicht beweisen; die weiteren Teilaufgaben werden sich diesem Beweis widmen.

k) Für jeden der vier vorgegebenen Punkte, also für $P \in \{A, B, C, D\}$, sei $t_{\lambda,P}$ die Tangente an $\mathcal{K}_\lambda$ im Punkt P. Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis

$$\mu(\mathcal{K}_\lambda) := (t_{0,P}, t_{\infty,P}; t_{\lambda,P}, t_{1,P})$$

unabhängig von der Wahl von P ist.

l) Beweisen Sie die Gleichung

$$\mu(\mathcal{K}_{\alpha,\beta}) = \frac{\alpha}{\beta}$$

für die in Teilaufgabe i) angegebenen Linearkombinationen $\alpha N_\infty + \beta N_0$.

m) Beweisen Sie, dass $\mu(K_\lambda) = \lambda$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Grenzübergang $E \to P$ für den in der Definition von $\mathcal{K}_\lambda$ verwendeten Laufpunkt E. Wählen Sie P geschickt.

n) Bestimmen Sie den Kegelschnitt $\mathcal{K}_{-1}$ aller Punkte, die zu den Punkten A bis D harmonische Verbindungsgeraden haben, und versuchen Sie, diesen geometrisch zu interpretieren und zu skizzieren.

o) Betrachten Sie jetzt allgemein vier Kegelschnitte, die sich in genau vier Punkten schneiden, auch wenn diese Punkte nicht mehr unbedingt die A bis D aus der Aufgabenstellung sind. Begründen Sie, weshalb das Doppelverhältnis der Tangenten an den gemeinsamen Schnittpunkten immernoch unabhängig von der Wahl des konkreten Schnittpunkts ist.

— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 2. Verallgemeinerung von Quadrilateral Sets

Gegeben sei ein konvexes n-Eck mit Eckpunkten c_1 bis c_n sowie eine Gerade l, die das n-Eck nicht schneidet. Für $1 \leq i \leq n$ ergeben sich Punkte a_i durch senkrechte Projektion der c_i auf l, sowie Punkte b_i als Schnittpunkte der verlängerten Polygonkante $c_i \vee c_{i+1}$ mit l. Alle Indizes in dieser Aufgabe sind modulo n zu verstehen.

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auf l die folgende Gleichung gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} [a_{i+1}, b_i]$$

a) Machen Sie sich für $n = 5$ eine Skizze.

b) In welchem Sinne ist diese Aufgabe eine Verallgemeinerung von Quadrilateral Sets? Für welches n entspricht die Situation am ehesten der eines Quadrilateral Sets? Machen Sie sich auch davon eine Skizze.

c) Wählen Sie geeignete Koordinaten, so dass die Punkte c_i klar als um eine Höhe h_i geliftete Versionen der a_i erkennbar sind.

d) Überlegen Sie sich, welche kollinearen Punktetripel sich aus der Konstruktion ergeben, und drücken Sie diese in den von Ihnen gewählten Koordinaten aus.

e) Formen Sie die Gleichungen, die sich aus den Kollinearitäten ergeben, so um, dass darin die Höhen sowie Determinanten in homogenen Koordinaten auf der Geraden l auftauchen.

f) Kombinieren Sie diese Gleichungen geeignet, um das angekündigte Endresultat zu erhalten:

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} [a_{i+1}, b_i]$$

g) Überlegen Sie, unter welchen Einschränkungen der Umkehrschluss gilt, dass also aus dieser einen Gleichung die Liftbarkeit der Punkte zu einem n-Eck folgt.