Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Aufgabenblatt 6 (26. Mai 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Bracket-Polynome

a) Es seien A bis F sechs Punkte in allgemeiner Lage. Die Gleichung $[ABC][DEF] - [ABD][CEF] = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn die Geraden $(A \vee B)$, $(C \vee D)$ und $(E \vee F)$ durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Beweisen Sie diesen Zusammenhang anders als in der Vorlesung, indem Sie sich auf einen Spezialfall zurückziehen, in dem zumindest zwei der Geraden parallel sind, und interpretieren Sie die Determinanten als orientierte Dreiecksflächen. Begründen Sie, warum dieser Spezialfall die Allgemeinheit nicht beschränkt.

b) Geben Sie ein Bracket-Polynom an, das genau dann Null wird, wenn der Punkt K auf der Geraden $\big((A \vee B) \wedge (C \vee D)\big) \vee \big((E \vee F) \wedge (G \vee H)\big)$ liegt. Nehmen Sie dabei an, dass die Punkte hinreichend allgemein liegen, so dass diese Gerade tatsächlich eindeutig definiert ist.

c) In den vorangegangenen Teilaufgaben wurden degenerierte Situationen ausgeschlossen, indem eine hinreichend allgemeine Lage der Punkte postuliert wurde. Welche Aussagekraft haben die jeweiligen Bracket-Polynome noch, wenn diese Annahmen nicht mehr gelten und degenerierte Situationen auftreten?

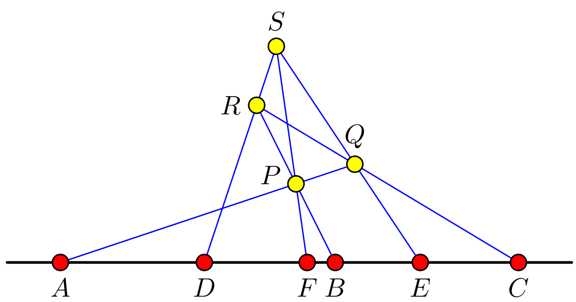
d) Jetzt seien A bis E fünf Punkte in allgemeiner Lage, die einen Kegelschnitt definieren, und P und Q zwei weitere Punkte. Geben Sie ein Bracket-Polynom an, das genau dann Null wird, wenn P auf der Polaren zu Q bezüglich dieses Kegelschnitts liegt. Zur Erinnerung: wird ein Kegelschnitt als Punktemenge $\big\{p \in \mathbb{RP}^2 \;\big|\; p^T M p = 0\big\}$ beschrieben durch eine *symmetrische* Matrix M, so ist MQ die Polare zu Q.

— ***Präsenzaufgaben für Gruppen 1 und 2, Hausaufgaben für Gruppen 3 und 4*** —

Aufgabe 2. Quadrilateral Sets

Diese Aufgabe behandelt sogenannte Quadrilateral Sets, abgekürzt auch als QuadSets geschrieben. Rechts sehen Sie eine Konstruktion, mit der man sechs Punkte A bis F auf einer Geraden erhalten kann, die in QuadSet-Relation zueinander stehen.
Die Bedingung, dass 6 Punkte ein QuadSet $(A, D; B, E; C, F)$ bilden, kann auch als Gleichung unter Verwendung von Determinanten geschrieben werden:

$$[A, E][B, F][C, D] = [A, F][B, D][C, E]$$



a) Die in der Vorlesung eingeführten von-Staudt-Konstruktionen lassen sich als Spezialfälle dieser QuadSet-Relation aufgefassen. Geben Sie die jeweiligen QuadSet-Relationen konkret an, und überprüfen Sie den Determinantenausdruck in Standard-Koordinaten durch Nachrechnen.

b) Welche Bedingung muss eine Bracket-Polynom-Gleichung erfüllen, damit sie unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sowie invariant unter projektiven Transformationen ist?

c) Dualisieren Sie die abgebildete Konstruktion, um eine Menge von sechs Geraden zu erhalten, die in QuadSet-Relation stehen.

   Hinweis: Im Rahmen dieses Übungsblattes wird die oben angegebene Figur als „primal" und die hier konstruierte als „dual" bezeichnet werden. Diese Zuordnung hat keine Gültigkeit über dieses Blatt hinaus; häufig wird genau die umgekehrte Zuordnung verwendet.

d) Schneiden Sie die sechs konkurrenten Geraden in Ihrer dualen Konstruktion mit einer weiteren Geraden g, so dass sich sechs verschiedene Schnittpunkte ergeben. *Behauptung:* Diese sechs Punkte bilden wieder ein Quadrilateral Set. Weisen Sie diese Behauptung nach, indem Sie zu diesen Punkten eine entsprechende primale Konstruktion erstellen, bevorzugt in einer anderen Farbe. Wie viele reelle Freiheitsgrade haben Sie dabei?

— *Hausaufgaben*—

Aufgabe 3. Quadrilateral Sets (Fortsetzung)

Wenn Teilaufgaben von Aufgabe 2 in Ihrer Tutorübung nicht abschließend gelöst worden sind, dann bearbeiten Sie diese bitte als Hausaufgabe.

e) Algebraisch ist die QuadSet-Relation eine Gleichung von Bracket-Polynomen. Ein Bracket-Polynom ist eine gewichtete Summe von Produkten von Brackets. Schreiben Sie auch die Bedingung für harmonische Lage als Bracket-Polynom-Gleichung.

f) Beschreiben Sie geometrisch ein harmonisches Punkte-Quadrupel als Spezialfall eines Quadrilateral Sets. Untersuchen Sie, wie sich diese Äquivalenz in den Gleichungen algebraisch darstellt. Betrachten Sie auch die dabei auftretenden Sonderfälle.

g) Die QuadSet-Relation wurde als Gleichung für Punkte auf $\mathbb{RP}^1$ angegeben. Wie kann man diese Gleichung auf kollineare Punkte im $\mathbb{RP}^2$ übertragen? Verfahren Sie analog zu dem Vorgehen, mit dem das Doppelverhältnis von kollinearen Punkten in der Ebene definiert wurde.

Aufgabe 4. Von Determinanten zu Koordinaten

Gegeben seien die folgenden Determinantenwerte:

$[ABC] = 2$	$[ACD] = -4$	$[ADF] = 14$	$[BDE] = -6$	$[CDF] = 6$
$[ABD] = -6$	$[ACE] = 2$	$[AEF] = 2$	$[BDF] = -5$	$[CEF] = 9$
$[ABE] = 0$	$[ACF] = -6$	$[BCD] = 4$	$[BEF] = 2$	$[DEF] = -19$
$[ABF] = -2$	$[ADE] = -6$	$[BCE] = 2$	$[CDE] = -8$	

a) Geben Sie eine Konfiuration von sechs Vektoren $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}^3$ an, aus der sich diese Determinanten ergeben.

Hinweis: Es existiert eine ganzzahlige Lösung zu dieser Teilaufgabe. Sie dürfen jedoch auch eine nicht-ganzzahlige Lösung angeben.

b) Berechnen Sie den Wert der Determinante $[BCF]$. Weshalb hängt dieser Wert nicht von Ihrer speziellen Punktkonfiguration ab, sondern nur von den vorgegebenen Determinanten?

c) Überprüfen Sie, dass sämtliche Determinanten stimmen, nicht nur die, die Sie bei der Bestimmung der Vektoren verwendet haben.

Aufgabe 5. Doppelverhältnisse und Kegelschnitte

In dieser Aufgabe wird nach der Existenz von multihomogenen Bracket-Polynomen für bestimmte Eigenschaften gefragt. (Ein Bracket-Polnom beschreibt eine Eigenschaft, wenn es genau in den Fällen Null wird, in denen die Eigenschaft erfüllt ist. Eigentlich geht es hier also um Gleichungen, deren eine Seite ein multihomogenes Bracketpolynom ist, und deren andere Seite konstant Null ist.) Bei den Teilaufgaben, wo ein solches existiert, geben Sie dieses bitte explizit an.

a) Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^1$ auf der projektiven Geraden das Doppelverhältnis $(A, B; C, D) = \frac{3}{7}$ haben?

b) Gegeben seien fünf Punkte $A, B, C, D, E \in \mathbb{RP}^1$ auf der projektiven Geraden. Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ gleich dem Doppelverhältnis $(A, C; D, E)$ ist?

c) Es seien $A, B, C, D, X, Y \in \mathbb{RP}^2$ sechs paarweise verschiedene Punkte in der Ebene. Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, welches die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ von X und von Y aus gesehen den gleichen Wert hat, dass also $(A, B; C, D)_X = (A, B; C, D)_Y$) ist?

d) Für fünf paarweise verschiedene Punkte $A, B, C, D, X \in \mathbb{RP}^2$ beschreibt die Menge

$$\left\{ Y \in \mathbb{RP}^2 \;\middle|\; (A, B; C, D)_X = (A, B; C, D)_Y \right\}$$

den eindeutig bestimmten Kegelschnitt durch diese fünf Punkte. Gibt es ein mulithomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass ein sechster Punkt ebenfalls auf diesem Kegelschnitt liegt?