Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Aufgabenblatt 5 (19. Mai 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Doppelverhältnisse in $\mathbb{CP}^1$

$\mathbb{CP}^1$ ist die projektive Gerade über $\mathbb{C}$. Stellen Sie sich diese vor als die komplexe Zahlenebene (also die Ebene, in der Realteil und Imaginärteil zwei reelle Koordinaten sind), zusammen mit einem weiteren Punkt im Unendlichen. Punkte in dieser Zeichenebene werden homogen durch Vektoren aus zwei komplexen Zahlen beschrieben.

a) Überlegen Sie sich, weshalb in dieser Zeichenebene Doppelverhältnisse auch von nicht-kollinearen Punkten sinnvoll definiert sind, ohne dass man dazu einen Punkt angeben müsste, von dem aus dieses zu betrachten sei.

b) Geben Sie (möglichst einfache) Koordinaten an für vier Punkte, so dass drei davon ein gleichseitiges Dreieck bilden, und der vierte in der Mitte dieses Dreiecks liegt. Berechnen Sie ein Doppelverhältnis dieser vier Punkte.

c) Berechnen Sie ein Doppelverhältnis von vier Punkten, die ein Quadrat bilden.

d) Überlegen Sie sich, möglichst ohne viel zu rechnen, wie viele andere Werte bei den beiden eben ausgerechneten Doppelverhältnissen durch Vertauschen der Reihenfolge auftreten können, und welche Werte sich so ergeben.

Aufgabe 2. Konstruierbares Maximum

Gegeben sei eine projektive Basis $0, 1, \infty$ auf einer Zeichengeraden. Aus diesen Punkten lassen sich mit den von-Staudt-Konstruktionen für Addition und Multiplikation weitere Punkte konstruieren, die bezüglich der Skala bestimmten Zahlen entsprechen. $m(n)$ sei die größtmögliche Zahl, die auf diese Weise konstruiert werden kann, wenn die Konstruktion maximal n Punkte enthalten darf. Dabei sollen alle Punkte mitgezählt werden: die drei vorgegebenen, das Endresultat, sowie alle Zwischenergebnisse und sonstigen Hilfspunkte, die für die von-Staudt-Konstruktionen verwendet werden. Wird ein Hilfspunkt von mehreren von-Staudt-Konstruktionen verwendet, ist er dennoch nur ein mal zu zählen.

a) Geben Sie eine Formel (ggf. mit Fallunterscheidungen) an, die $m(n)$ für alle $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ errechnet.

b) Untersuchen Sie asymptotisch das Verhalten von $m(n)$.

c) Mit der in den meisten Computerprogrammen verwendeten Gleitkommadarstellung in doppelter Genauigkeit (double precision floating point numbers) sind endliche Zahlen nur dann darstellbar, wenn sie kleiner als 2^{1024} sind. Wie viele Punkte reichen aus, um eine Inzidenzkonfiguration anzugeben, die diese Schranke sprengt?

d) Bereits deutlich kleinere natürliche Zahlen können als Gleitkommazahlen nicht mehr exakt widergegeben werden: oberhalb von 2^{53} werden natürliche Zahlen eventuell auf Vielfache von Zweierpotenzen gerundet. Wie viele Punkte benötigt man zum Durchbrechen dieser Schranke?

— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 3. Binäre Konstruktion

Für eine gegebene natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ benötigt deren Binärdarstellung n Bits, von denen m Einsen seien. Formal:

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \qquad b_i \in \{0,1\} \qquad b_{n-1} = 1 \qquad \sum_{i=0}^{n-1} b_i = m$$

Beweisen Sie, wie man mit maximal $n+m-1$ einzelnen Konstruktionen harmonischer Punkte (im Sinne der Funktion h aus Blatt 4 Aufgabe 2) die Zahl k konstruieren kann, ausgehend von den Punkten 0, 1 und ∞ auf einer Geraden der reellen projektiven Ebene.

Aufgabe 4. Teilverhältnisse

a) In $\mathbb{RP}^2$ sei ein nicht degeneriertes Dreieck gegeben durch seine Eckpunkte A_1, A_2, A_3. Die Seiten werden durch Punkte B_i unterteilt, wobei B_i auf der Verbindungsgerade von A_j und A_k liegt, für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Alle bisher beschriebenen Punkte seien endlich. Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration an.

b) Es sei F_i der Fernpunkt der Verbindungsgerade $A_j \vee A_k$ für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Mit diesem sei das sogenannte *Teilverhältnis* t_i mit Hilfe des Doppelverhältnisses definiert als

$$t_i = -(A_{i+1}, A_{i+2}; B_i, F_i)$$

wobei die Indizes modulo 3 gerechnet werden. Beschreiben Sie das so definierte Teilverhältnis als ein Verhältnis euklidischer Längen. Welche Rolle spielt die Orientierung dabei?

c) In der Standardeinbettung mit auf $z = 1$ normierten Repräsentanten können Sie 3×3-Determinanten auch als orientierte Dreiecksflächen auffassen. Verwenden Sie diese Interpretation, um die oben definierten Teilverhältnisse t_i äquivalent als Verhältnisse von Flächen zu beschreiben. Verwenden Sie bestehende Punkte der Konfiguration als Ecken dieser Flächen.

d) Im Folgenden soll das Produkt der drei Teilverhältnisse, also $t = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$, genauer untersucht werden. Drücken Sie dieses Produkt mit Hilfe der Determinanten aus Teilaufgabe c) aus.

e) Begründen Sie, weshalb Sie die in Teilaufgabe c) eingeführte Normierungsbedingung auf $z = 1$ für den Wert von t keine Rolle mehr spielt.

f) Untersuchen Sie, ob die so berechnete Größe t unter projektiven Transformationen invariant ist. Wie verhält sich diese Größe insbesondere, wenn Punkte der Konfiguration auf die Gerade im Unendlichen abgebildet werden?