Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Aufgabenblatt 1 (14. April 2014)

— ***Präsenzaufgaben für Gruppen 1 und 2, Hausaufgaben für Gruppen 3 und 4*** —

Aufgabe 1. Inzidenzmatrix mit Lücken

★a) Ergänzen Sie die Lücken in der nachfolgenden Matrix so, dass diese die Inzidenzstruktur einer endlichen projektiven Ebene darstellt. Dabei symbolisiert ✔ eine Inzidenz, und – keine Inzidenz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
a								–		✔			
b			–	–				–		–	–	–	✔
c			–						✔				
d			–		✔			–					
e	✔								✔				✔
f													
g			–					–					
h	✔	✔											
i							✔					✔	
k	✔				–	–				–		–	
l	✔			✔				✔					
m			✔							✔			
n					–	–		✔					

b) Wie lassen sich aus der Inzidenzmatrix Verknüpfungstabellen für die Operationen $\vee$ (join) und $\wedge$ (meet) ablesen? Legen Sie solche Tabellen an und füllen Sie exemplarisch einige Einträge aus.

c) Welche Ordnung hat diese Ebene?

d) Fertigen Sie eine (unbeschriftete) Skizze dieser Ebene an.
Hinweis: Alle projektiven Ebenen dieser Ordnung sind isomorph.

e) Beschriften Sie die eben angefertigte Skizze in Übereinstimmung mit der Inzidenzmatrix. Wie eindeutig ist eine solche Beschriftung?

f) Auf wie viele verschiedene Arten können die Zeilen und Spalten mit homogenen Koordinaten beschriftet werden?

★g) Geben Sie eine solche Beschriftung an.

— *Präsenzaufgaben*—

Aufgabe 2. (n_r, m_k)-Konfigurationen

Gegeben sei eine Inzidenzstruktur mit Punkten $\mathcal{P}$, Geraden $\mathcal{L}$ und Inzidenzrelation $\mathcal{I}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Zu zwei Punkten $p, q \in \mathcal{P}$ mit $p \neq q$ gibt es höchstens eine Gerade $l \in \mathcal{L}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $q\mathcal{I}l$.

(ii) Zu zwei Geraden $l, m \in \mathcal{L}$ mit $l \neq m$ gibt es höchstens einen Punkt $p \in P$ mit $p\mathcal{I}l$ und $p\mathcal{I}m$.

Eine (n_r, m_k)-Konfiguration ist eine Inzidenzstruktur im eben beschrieben Sinne mit n Punkten und m Geraden, bei der auf jeder Geraden k Punkte liegen und durch jeden Punkt r Geraden gehen.

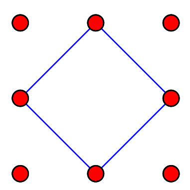
a) Wie unterscheiden sich die oben angegebenen Axiome von denen einer projektiven Ebene?

b) Zeigen Sie, dass für jede (n_r, m_k)-Konfiguration $n \cdot r = m \cdot k$ gilt.

c) Betrachten Sie m Geraden in der reellen Ebene in allgemeiner Lage und alle Schnittpunkte dieser Geraden. Welche Konfigurationen (also welche n, r, k) ergeben sich?

d) Betrachten Sie n Punkte in der reellen Ebene in allgemeiner Lage und alle davon aufgespannten Geraden. Welche Konfigurationen ergeben sich?

e) Vervollständigen Sie die folgende Skizze zu einer $(8_3, 8_3)$-Konfiguration.



f) Finden Sie eine $(13_4, 13_4)$-Konfiguration.

★g) Finden Sie weitere (n_r, m_k)-Konfigurationen.

— *Hausaufgaben*—

Aufgabe 3. Abzählen

Die Zahl der Punkte und Geraden einer projektiven Ebene über einem Körper mit n Elementen beträgt

$$n^2 + n + 1 = \frac{n^3 - 1}{n - 1}$$

a) Zeigen Sie, dass obige Gleichung stimmt.

b) Geben Sie für die beiden Seiten der Gleichung unterschiedliche Argumentationen an, wie man auf diese Zahl kommt.

c) Verallgemeinern Sie diese Gleichung für beliebige Dimension d, also für den projektiven Raum $\mathbb{KP}^d$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| = n$.

Aufgabe 4. Teilmengen-Konfigurationen

Gegeben sei eine Grundmenge A mit a Elementen. Fassen Sie alle dreielementigen Teilmengen davon als Punkte auf, und alle zweielementigen Teilmengen als Geraden. Inzidenz sei über Mengeninklusion definiert.

$$\mathcal{P} := \{p \subset A \mid |p| = 3\} \qquad \mathcal{L} := \{l \subset A \mid |l| = 2\} \qquad p\mathcal{I}l := l \subset p$$

a) Was für eine Konfiguration erhalten Sie für $a = 3$? Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration an, und beschriften Sie diese.

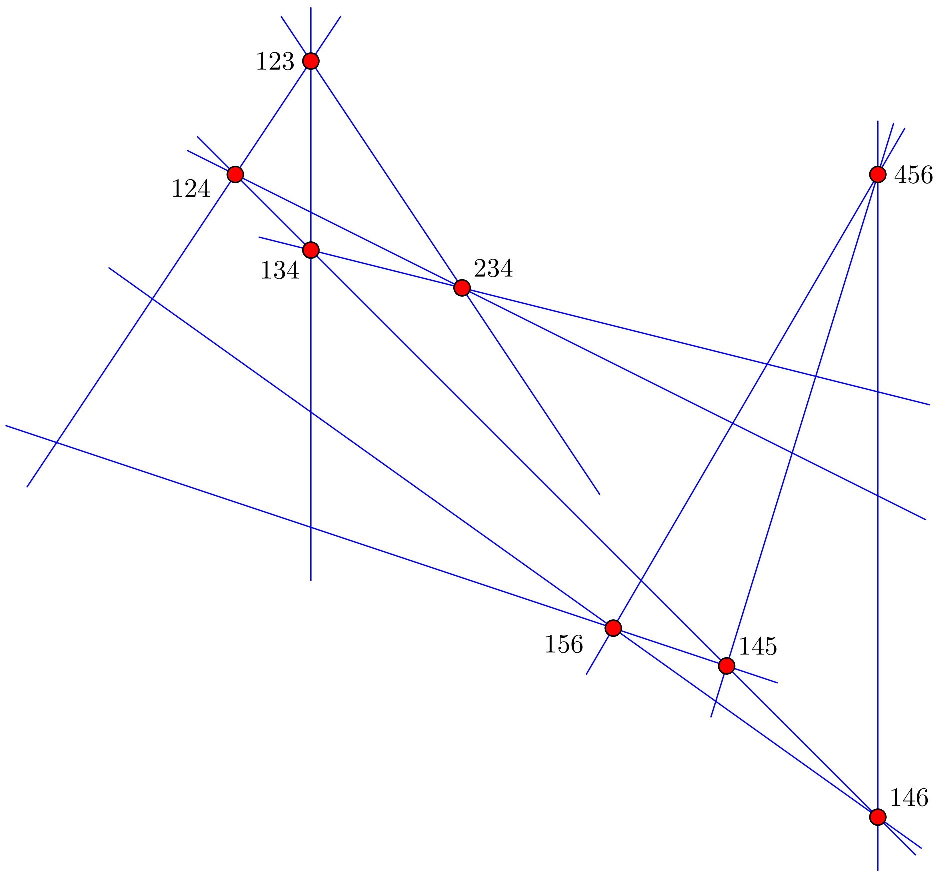
b) Benennen Sie auch die Konfiguration, die sich für $a = 4$ ergibt, und fertigen Sie eine beschriftete Skizze dieser Konfiguration an.

c) Was für eine Konfiguration ergibt sich für $a = 5$? Was ist besonders an dieser Situation?

d) Können Sie die Konfiguration für $a = 5$ so zeichnen, dass Geraden und Punkte im Sinne der Konfiguration tatsächlich als Geraden und Punkte der euklidischen Ebene erscheinen?

e) Was hat die Konfiguration mit $a = 5$ mit dem Satz von Desargues zu zun?

f) Ergänzen und beschriften Sie die folgende Zeichnung so, dass sie eine Konfiguration für $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ widerspiegelt.



Hinweis: Die Punkte der Angabe lassen sich exakt auf 5mm Karopapier übertragen.

g) Bezeichnen Sie die Konfiguration, die man im allgemeinen Fall erhält, also für ein beliebiges a.

h) Beschreiben Sie diese Konfigurationen als Projektionen von höherdimensionalen Objekten.

Aufgabe 5. Axiomatisches

Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ist eine projektive Ebene genau dann wenn die folgenden Axiome gelten:

(i) Für $p, q \in \mathcal{P}, p \neq q$ existiert genau ein $l \in \mathcal{L}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $q\mathcal{I}l$

(ii) Für $l, m \in \mathcal{L}, l \neq m$ existiert genau ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $p\mathcal{I}m$

(iii) Es gibt $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ so dass keine drei davon inzident zur selben Geraden sind.

Zeigen Sie allein mit Hilfe dieser Axiome, dass die folgenden Aussagen in jeder projektiven Ebene gelten:

a) Zu jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ gibt es eine Gerade $l \in \mathcal{L}$, die nicht inzident zu p ist.

b) Für zwei Geraden $l, m \in \mathcal{L}$ sind die Mengen der dazu inzidenten Punkte gleich mächtig:

$$|\{p \in \mathcal{P} \mid p\mathcal{I}l\}| = |\{q \in \mathcal{P} \mid q\mathcal{I}m\}|$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde an dieser Stelle eine Ungleichung gezeigt, mit dem Hinweis, dass die Gegenrichtung analog sei und daher Gleichheit gelte. Das stimmt so allerdings nur für endliche Mengen. Um auch unendliche Mengen sauber zu behandeln, müssen Sie eine Bijektion definieren, um deren Kardinalität zu vergleichen.

c) Bei endlichen projektiven Ebenen ist die Zahl der Punkte und die Zahl der Geraden stets gleich.

Hinweis: Einige dieser Aussagen haben Sie so oder so ähnlich schon in der Vorlesung gezeigt bekommen. Es ist nicht Sinn dieser Aufgabe, den Beweis aus der Vorlesung wörtlich abzuschreiben. Machen Sie sich statt dessen die relevanten Argumente noch einmal selber bewusst, und formulieren Sie den Beweis so wie Sie selbst ihn am besten nachvollziehen können.