Fragestunde

11.7.2014

Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\pi \circ \sigma)(i) := \pi(\sigma(i))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

"nach"

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 6\ 4) \circ (2\ 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \text{"}= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\text{"} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukte

A symmetrisch $:\Leftrightarrow A = A^T$

[A hermitesch $:\Leftrightarrow A = \overline{A^T}$ $\left(\Leftrightarrow A = \overline{A}^T \right.$

$\left.\Leftrightarrow \overline{A} = A^T \right)$

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die darstellende Matrix eines Skalarproduktes, dann MUSS (wegen Symmetrie des Skalarproduktes) gelten, dass A symmetrisch ist, d.h. dass $A = A^T$ $\Uparrow$ $b = c$

$$(v_1\ v_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2)\begin{pmatrix} aw_1 + bw_2 \\ cw_1 + dw_2 \end{pmatrix} = v_1aw_1 + v_1bw_2 + v_2cw_1 + v_2dw_2$$

$$\|$$

$$(w_1\ w_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (w_1\ w_2)\begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = w_1av_1 + w_2bv_2 + w_2cv_1 + w_2dv_2$$

Eigenwerte / Eigenvektoren

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

$\lambda = 1$ ist dreifacher Eigenwert von A

$\Rightarrow$ algebraische Vielfachheit von $\lambda = 1$ ist 3

zugehöriger Eigenraum

$\rightsquigarrow$ LGS $(A - \lambda E)v = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Kern $(A - \lambda E)$ $= \text{Kern}(A - E) = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ geom. Vielfacheit: 3

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierb.

neues Bsp:

Charakteristisches Polynom

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 (2-\lambda)^2 (5-\lambda)$$

Nullstellen: $p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1$ 4-fache Nullstelle

$\lambda_2 = 2$ 2- " "

$\lambda_3 = 5$ einfache Nullstelle

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$
$$\lambda_5 = \lambda_6 = 2$$
$$\lambda_7 = 5$$

$\Rightarrow$ EW 1 hat die algebraische Vielfachheit 4

EW 2 " " " " 2

EW 5 " " " " 1

→ der EigenRAUM ist immer
als Kern einer linearen Abbildung
(als Lösungsmenge eines homogenen LGS)
ein UntervektorRAUM.

→ Alle Vektoren im Eigenraum
sind bis auf den Nullvektor
Eigenvektoren zum zugehörigen Eigenwert.

Der Null<u>vektor</u> ist per Definition
nie ein Eigenvektor.

neues Bsp: 3×3-Matrix : $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

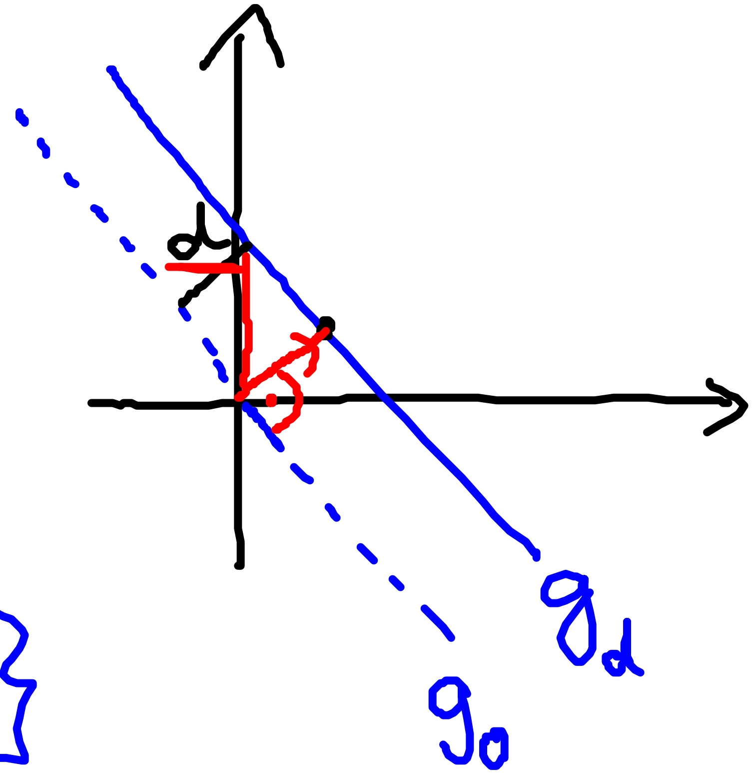
$$\rightsquigarrow \quad p_A = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & d & g \\ b & e-\lambda & h \\ c & f & i-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \pm \lambda^3 + (\qquad)\lambda^2 + (\qquad)\lambda + (\qquad)$$

$\boxed{\text{HNF}}$

$$\langle v, n \rangle - d = 0$$

orthogonaler Vektor
und $\|n\| = 1$



$$g_0 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, n \rangle = 0 \}$$

$$g_d = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, n \rangle = d \}$$

$$g_d = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, n \rangle - d = 0 \}$$

$\|n\| = 1$