→ TÜ $\boxed{\text{Aufgabe 26}}$

Geg: K-Vektorraum V
lineare Abbildung $f: V \to V$ (Automorphismus)

→ Sei $\vec{v} \in V$.

Def: Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f^n(\vec{v}) := (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}})(\vec{v}) = \underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{-mal}}(\vec{v}))\ldots)$$

Beh: $f^n(\vec{v}) \neq \vec{0}$ und $f^{n+1}(\vec{v}) = \vec{0}$
$\Rightarrow \{\vec{v}, f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^n(\vec{v})\}$ ist linear unabhängig

Bew: z.z.: $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^k(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^k(\vec{v}) = \vec{0}}$

Für alle $0 \leq \ell \leq n$ gilt dann

$$\vec{0} = f^\ell(\underbrace{\vec{0}}) = f^\ell\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^k(\vec{v})}\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^{k+\ell}(\vec{v})$$

$$= \sum_{k=\ell}^{n+\ell} \lambda_{k-\ell} f^k(\vec{v})$$

$$= \sum_{k=\ell}^{n} \lambda_{k-\ell} f^k(\vec{v}) \qquad (*)$$

Für $\ell = n$ erhalten wir aus Gleichung $(*)$

$$\lambda_0 f^n(\vec{v}) = \vec{0}$$

Wegen $f^n(\vec{v}) \neq \vec{0}$ folgt daraus $\lambda_0 = 0$

Für $\ell = n-1$ erhalten wir aus Gleichung $(*)$

$$\lambda_0 f^{n-1}(\vec{v}) + \lambda_1 f^n(\vec{v}) = \vec{0}$$

Wegen $\lambda_0 = 0$ und $f^n(\vec{v}) \neq \vec{0}$ folgt daraus $\lambda_1 = 0$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

→ TÜ $\boxed{\text{Aufgabe 27}}$

Geg: $\mathbb{K}$-Vektorraum V
und eine lineare Abbildung $f: V \to V$

Def: $\mathrm{Fix}(f) := \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{v}\}$

Aufgabe 27.1

Beh: $\mathrm{Fix}(f)$ ist ein UVR von V
$\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$

Sei $\vec{v} \in \mathrm{Fix}(f)$
$\Rightarrow \vec{v} = f(\vec{v}) \in \mathrm{Bild}(f)$
$\Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$

Bew: mit UVR-Kriterium

f linear

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathrm{Fix}(f)$

(i) $f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in \mathrm{Fix}(f) \Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \neq \{\}$

(ii) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathrm{Fix}(f): f(\underline{\vec{v}+\vec{w}}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) = \underline{\vec{v}+\vec{w}} \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in \mathrm{Fix}(f)$

(iii) $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{v} \in \mathrm{Fix}(f): f(\underline{\lambda \cdot \vec{v}}) = \lambda \cdot f(\vec{v}) = \underline{\lambda \cdot \vec{v}} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{v} \in \mathrm{Fix}(f)$

Aufgabe 27.2

Beh: $(f \circ f) = f \implies \mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Bild}(f)$

Bew: bereits gezeigt $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$

z.z: $(f \circ f) = f \implies \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$

Wähle hierfür zu $\vec{w} \in \mathrm{Bild}(f)$ ein $\vec{v} \in V$ mit $f(\vec{v}) = \vec{w}$

$$f(\underbrace{\vec{w}}) = f(f(\vec{v})) = (f \circ f)(\vec{v}) = f(\vec{v}) = \underbrace{\vec{w}}$$

$\implies \vec{w} \in \mathrm{Fix}(f)$

$\implies \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$