$\boxed{\text{Aufgabe 8}}$

<u>Geg:</u> Lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

<u>Frage:</u> Wie viele lineare Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt es mit

$$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\\alpha\end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von α?

Wiederholung: V, W K-Vektorräume

$f: V \to W$ lineare Abbildung

$\Longleftrightarrow$ f Vektorraum-Homomorphismus

$\Longleftrightarrow$ 1.) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V: f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

2.) $\forall \lambda \in K, \forall \vec{v} \in V: f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$

Wiederholung: V K-Vektorraum $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ Basis

Dann ist die Darstellung jedes Vektors $\vec{v} \in V$ als Linearkombination in den $\vec{b}_i$ eindeutig.

$\forall \vec{v} \in V \; \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n : \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$

$\Longrightarrow$ Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W

Sei $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis von V.

Sei $\vec{v} \in V$ ein beliebiger Vektor aus V.

$\Rightarrow \exists!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K: \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(\vec{v}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i\right) \\
&= f(\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{b}_n) \\
&= f(\lambda_1 \vec{b}_1) + f(\lambda_2 \vec{b}_2) + \ldots + f(\lambda_n \vec{b}_n) \\
&= \lambda_1 \cdot f(\vec{b}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{b}_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(\vec{b}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{b}_i)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Eine lineare Abbildung $f : V \to W$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W

ist bereits eindeutig durch die

Bilder von Basisvektoren

einer Basis von V festgelegt.

!

zurück zu Aufgabe 8:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis vom $\mathbb{R}^2$

Wir suchen <u>die eindeutige</u> Linearkombination von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in den Basisvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f\left(-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2} \cdot f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Es gibt nur eine Lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

mit $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Somit kann α nur den Wert $\alpha = 2$ annehmen.

Aufgabe 10

1.) ✓

2.) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{w} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{w} = \mu_1 \cdot \vec{e}_1 + \mu_2 \cdot \vec{e}_3 = 8 \cdot \vec{e}_1 + 12 \cdot \vec{e}_2 \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \checkmark$$

→ Rest / Diagramme siehe MuLö