Johanna Straubinger, 14.05.2013

Cayley-Menger-Determinante im Raum

$$288 \cdot V^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{1,1} & \mathbf{d}_{1,2} & \mathbf{d}_{1,3} & \mathbf{d}_{1,4} & 1 \\ \mathbf{d}_{2,1} & \mathbf{d}_{2,2} & \mathbf{d}_{2,3} & \mathbf{d}_{2,4} & 1 \\ \mathbf{d}_{3,1} & \mathbf{d}_{3,2} & \mathbf{d}_{3,3} & \mathbf{d}_{3,4} & 1 \\ \mathbf{d}_{4,1} & \mathbf{d}_{4,2} & \mathbf{d}_{4,3} & \mathbf{d}_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det(M)$$

- M wird als Cayley-Menger-Determinante bezeichnet
- $d_{i,j}$: = quadrierte Abstände der Eckpunkte v_i und v_j
- erstmals 1854 von Cayley angegeben
- ermöglicht Volumen eines Tetraeders anhand seiner Kantenlängen und der Anordnung der Kanten zu berechnen
- reduziert auf die zweite Dimension $\rightarrow$ Satz von Heron

Beweis der Cayley-Menger-Determinante:

Ausgangssituation:

$$V_{(v_0,v_1,v_2,v_3)} = \frac{1}{6}(\det(v_0,v_1,v_2) - \det(v_0,v_1,v_3) + \det(v_0,v_2,v_3) - \det(v_1,v_2,v_3))$$

$$\Rightarrow \quad 6 \cdot V = \det \begin{pmatrix} - & v_1 & - & 1 & 0 \\ - & v_2 & - & 1 & 0 \\ - & v_3 & - & 1 & 0 \\ - & v_4 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -6 \cdot V = \det \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \\ \vert & \vert & \vert & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$\Rightarrow \quad -36 \cdot V^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_1, v_4 \rangle & 1 \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle & 1 \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle & \langle v_3, v_4 \rangle & 1 \\ \langle v_4, v_1 \rangle & \langle v_4, v_2 \rangle & \langle v_4, v_3 \rangle & \langle v_4, v_4 \rangle & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2-2\langle v_1,v_1\rangle+\|v_1\|^2 & \|v_2\|^2-2\langle v_1,v_2\rangle+\|v_1\|^2 & \|v_3\|^2-2\langle v_1,v_3\rangle+\|v_1\|^2 & \|v_4\|^2-2\langle v_1,v_4\rangle+\|v_1\|^2 & 1 \\ \|v_1\|^2-2\langle v_2,v_1\rangle+\|v_2\|^2 & \|v_2\|^2-2\langle v_2,v_2\rangle+\|v_2\|^2 & \|v_3\|^2-2\langle v_2,v_3\rangle+\|v_2\|^2 & \|v_4\|^2-2\langle v_2,v_4\rangle+\|v_2\|^2 & 1 \\ \|v_1\|^2-2\langle v_3,v_1\rangle+\|v_3\|^2 & \|v_2\|^2-2\langle v_3,v_2\rangle+\|v_3\|^2 & \|v_3\|^2-2\langle v_3,v_3\rangle+\|v_3\|^2 & \|v_4\|^2-2\langle v_3,v_4\rangle+\|v_3\|^2 & 1 \\ \|v_1\|^2-2\langle v_4,v_1\rangle+\|v_4\|^2 & \|v_2\|^2-2\langle v_4,v_2\rangle+\|v_4\|^2 & \|v_3\|^2-2\langle v_4,v_3\rangle+\|v_4\|^2 & \|v_4\|^2-2\langle v_4,v_4\rangle+\|v_4\|^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mithilfe von $d_{i,j} = < v_i - v_j , v_i - v_j > = \| v_i \|^2 - 2 < v_i , v_j > + \| v_j \|^2$ ergibt sich die Cayley-Menger-Determinante