Ernö Rubik

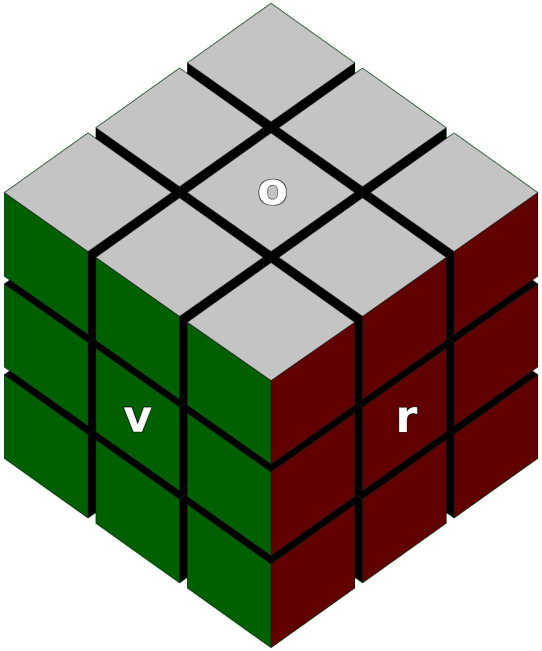
Er wurde am 13.07.1940 in Budapest geboren. Später war er Architekt, Designer und wurde Professor an der Moholy-Nagy-Universität für Kunsthandwerk und Gestaltung. 1974 erstellt er den ersten Prototyp des Zauberwürfels, um seinen Studenten die Möglichkeit zu geben ihr räumliches Denkvermögen zu trainieren.

Ab 1981 wird der Rubiks Cube überall auf der ganzen Welt vertrieben.

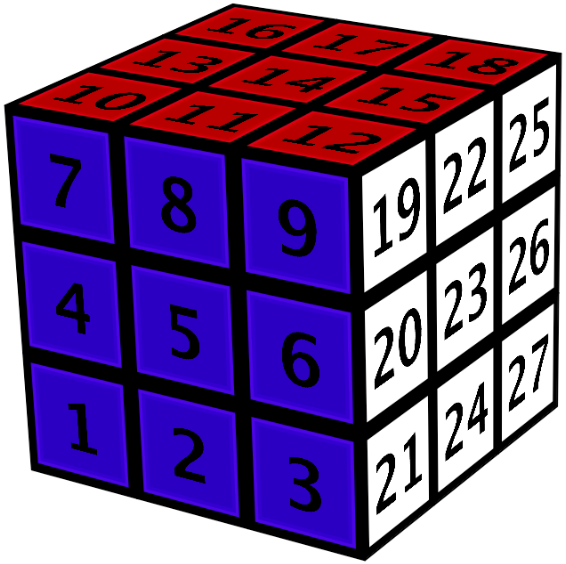
Elementare Züge

Es gibt 6 elementare Züge : R,L,O,U,V,H (rechts, links, oben, unten, vorne, hinten) um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht .

Jeder Zug lässt sich als Hintereinanderausführung elementarer Züge schreiben.



Gruppenstruktur

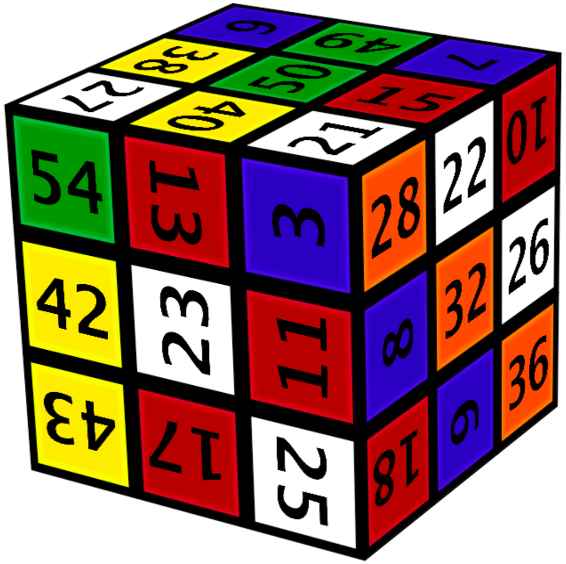


Für die Lösung sind nur die äußeren Seiten von Interesse.

⇒ Nummeriere die einzelnen Seiten mit 1-54

⇒ Jeder Zug lässt sich mit einer Permutation aus S_{54} beschreiben, wobei die Identität einem sortierten Würfel entspricht.

Unzählige Möglichkeiten



<u>**Aufgabe:**</u> Wir bekommen einen (hoffentlich) nur durch Verkettung elementarer Züge verdrehten Würfel. Das entspricht einer Permutation $\pi \in S_{54}$. Um diesen zu lösen, suchen wir eine Zugfolge $z_1, z_2, \ldots, z_k \text{ mit } z_i \in \{O, U, R, L, V, H\}$, so dass $\pi \circ z_1 \circ z_2 \circ \ldots \circ z_k = id$.

Problem: $|S_{54}| = 54! = 2{,}308437 \cdot 10^{71}$

Einschränkung auf die Rubiksgruppe I

Mechanische Einschränkungen sind:

- Mitten bewegen sich nicht (sie werden nur gedreht, das ändert aber am normalen Würfel nichts)
- Farben der Eckwürfel sind aneinander gebunden (z.B. existiert die Ecke weiß-gelb nicht)
- Farben der Kanten sind aneinander gebunden

Die Möglichkeiten den Würfel nach dem Zerlegen wieder zusammen zu bauen sind:

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 5{,}19024 \cdot 10^{20}$$

Vorzeichen einer Permutation

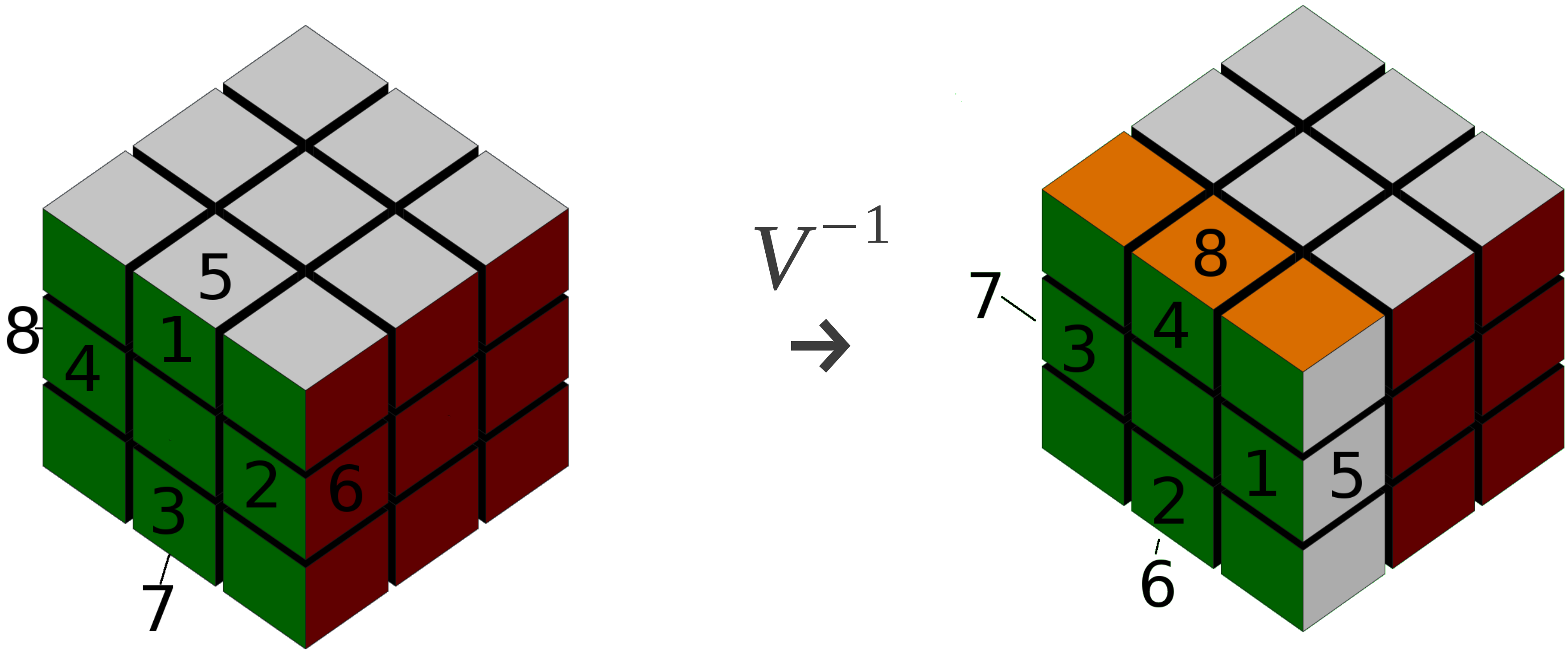
Eine Vertauschung $t \in S_n$ ist eine Permutation die genau zwei Elemente verändert, den Rest beibehält. Jede beliebige Permutation kann durch eine Verkettung von Vertauschungen erzeugt werden.

$$\underline{Satz}: \; Sei \; \pi \in S_n und\, seien \; t_i, s_i \, Vertauschungen\, für\, alle\, i.$$
$$Gilt\, \pi = t_1 \circ t_2 \cdots \circ t_k = s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_l, so\, gilt\, (-1)^k = (-1)^l$$

Es folgt: $sign(\pi) = (-1)^k \quad für\, \pi \in S_n$ ist wohldefiniert und es gilt:

$$sign(\pi_1 \circ \pi_2) = sign(\pi_1) \cdot sign(\pi_2), \quad für\, \pi_{1,} \pi_2 \in S_n$$

Vorzeichen von elementaren Zügen



Wir betrachten die Wirkung eines elementaren Zuges auf die Kanten.

Hier gilt: $V^{-1} \in S_{54}$ kann als Verkettung zweier 4-Zykel $v_1, v_2 \in S_{54}$ geschrieben werden. Wobei $sign(v_1) = sign(v_2) = -1$ gilt, weswegen $sign(V^{-1}) = 1$ gilt.

Einschränkung auf die Rubiksgruppe II

Gruppentheoretische Einschränkungen sind:

- ein einzelner Kantenwürfel kann nicht gekippt werden (da, das Vorzeichen negativ wäre)
- es können weder genau zwei Kantenwürfel, noch genau zwei Eckenwürfel vertauscht sein
- ein einzelner Eckenwürfel kann nicht verdreht werden

Die Möglichkeiten den Würfel durch elementare Züge zu verdrehen sind:

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 4{,}3252 \cdot 10^{19}$$

Die Rubiksgruppe

Rubiksgruppe: $R := \{\tau \in S_{54} \ : \tau = z_1 \circ z_2 \circ \ldots \circ z_k\} \ \ mit\ z_i \in O, U, R, L, V, H \ \ für\ i = 1, \ldots, n$

Die Menge aller farbigen Plättchen: $P := \{1, 2, \ldots, 54\}$

Die Menge aller Kantenplättchen: P_K

Die Menge aller Eckenplättchen : P_E

Was für Züge sind $\varepsilon := stab_R(P_E) \quad \kappa := stab_R(P_K)$?

Lösungstrategie

Schritt 1: Bringe alle Kantenwürfel an die richtige Stelle, durch Züge aus R.

Schritt 2: Orientiere alle Kantewürfel richtig, durch Züge aus $\bar{\kappa}$.

Schritt 3: Bringe alle Eckenwürfel an die richtige Stelle, durch Züge aus κ.

Schritt 4: Orientiere die Eckenwürfel richtig, durch Züge aus $\kappa \cap \bar{\varepsilon}$.

Einziges Problem ist es nun, genügend mächtige Zugfolgen aus den jeweiligen Stabilisatorgruppen zu finden.

Zugfolgen

$\underline{Satz:} \; Sei \; (G, \circ) \; eine \; endliche \; Gruppe \; und \; g \in G. \;\; Dann \; existiert \; i \in \mathbb{N} \; mit \; g^i = id.$
$Das \; kleinste \; i \; mit \; dieser \; Eigenschaft \; nennt \; man \; die \; Ordnung \; von \; g.$

Das heißt, dass jede feste Zugfolge aus *R* denn Würfel unverändert lässt, wenn man sie nur oft genug anwendet.

Welche Ordnung hat der elementare Zug H?

Wir betrachten die Zugfolge X = $VO^{-1}V^{-1}O$. Welche Ordnung hat X ?

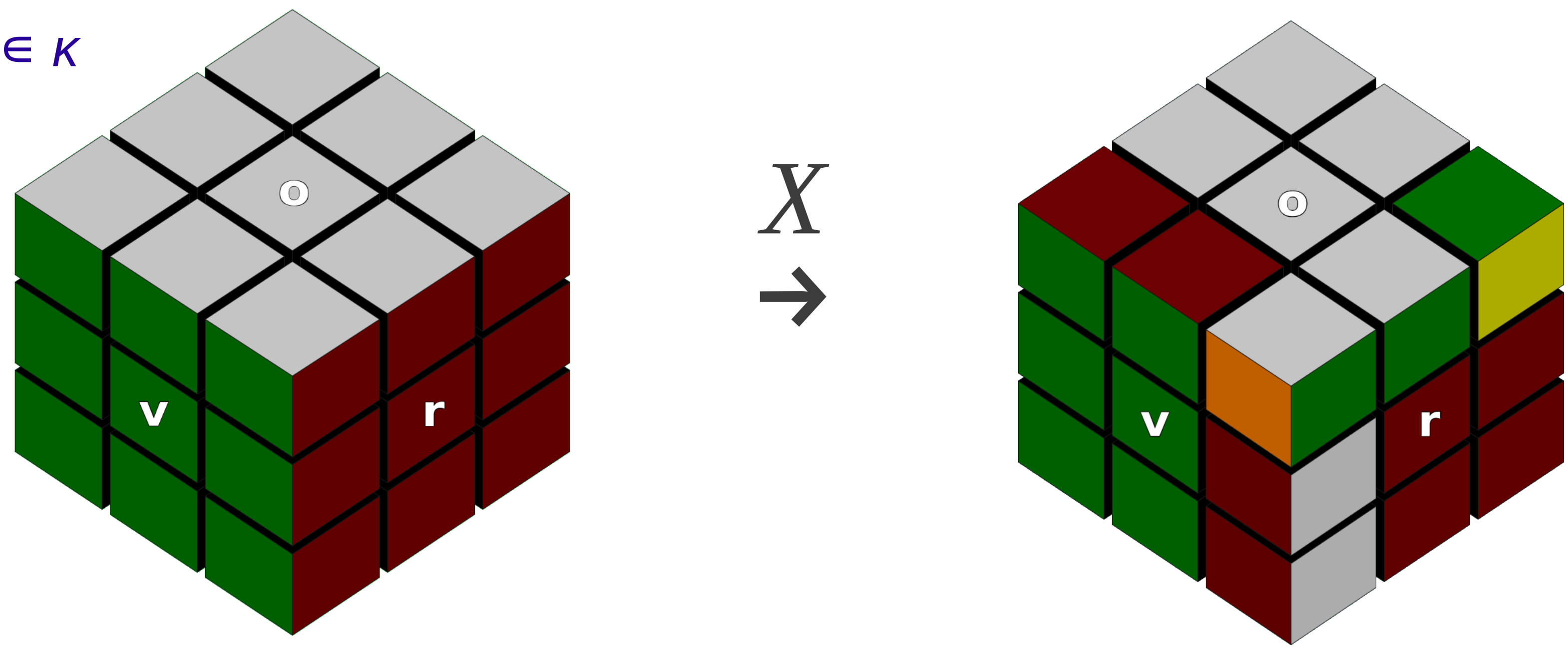
Die Zugfolge X

<u>Eigenschaften von X:</u>

a) X bewegt drei Kantenwürfel, und 4 Ecken Würfel

b) Die Kantenwürfel werden zyklisch vertauscht, die der Eckenwürfel in 2 Paaren

c) $X^3 \in \kappa$



Konjugation

Problem: X vertauscht drei Kanten a,b,c zyklisch. Was ist wenn wir beliebige Kanten x,y,z zyklisch vertauschen wollen?

Lösung: Wir suchen eine Zugfolge Y die $x \to a, y \to b$ und $z \to c$ abbildet. Wenden wir nun X an, so vertauschen wir x,y,z zyklisch. Nach anwenden von Y^{-1} sind x, y, z wieder an ihrer ursprünglichen Position und zyklisch vertauscht.

Dieses Prinzip ist bei allen vier Schritten des Lösungsverfahrens oft anzuwenden.

Lösung des Würfels Schritt 1

Wir können alle Kanten an die richtige Position bringen, indem wir zuerst Kanten nach Gefühl an die richtige Stelle bringen und dann Zug X und Konjugation verwenden.

Besonderheit:

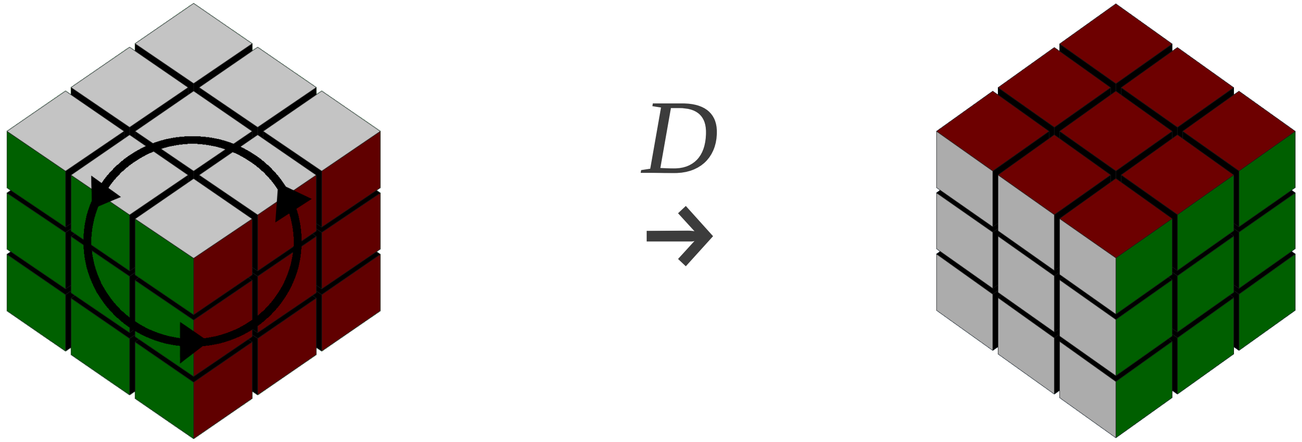
Hat die Permutation der Kanten ein negatives Vorzeichen, so ist der Würfel erst nach Drehung einer Seite um 90° durch X zu lösen.

Damit ist Schritt 1 erledigt.

Lösung des Würfels Schritt 2

X^3 behält Orientierung und Position der Kanten bei.

D bezeichnet die Drehung des gesamten Würfels um 120° (gegen den Uhrzeigersinn) durch die Achse, die durch die Ecke vorne, rechts oben geht.



Durch etwas Probieren/Überlegen erhalten wir zum Beispiel:

Der Zug $\mathbf{XD^{-1}XXD}$ kippt die oberen beiden von X betroffenen Kanten.

Damit ist auch Schritt 2 beendet.

Die Lösung des Würfels Schritt 3

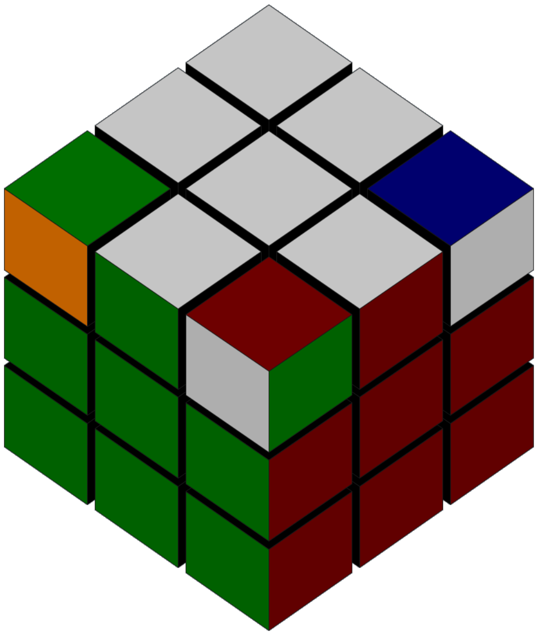
$X^3 \in \kappa \Rightarrow X^3$ verändert die Kanten nicht. Aber X tauscht immer zwei Paare von Ecken. $\Rightarrow X^3$ positives Vorzeichen.

Da alle Kanten bereits richtig sind hat auch die Permtation der Ecken ein positives Vorzeichen.

Mit X^3 und Konjugation lassen sich also alle Ecken an die richtige Position bringen.

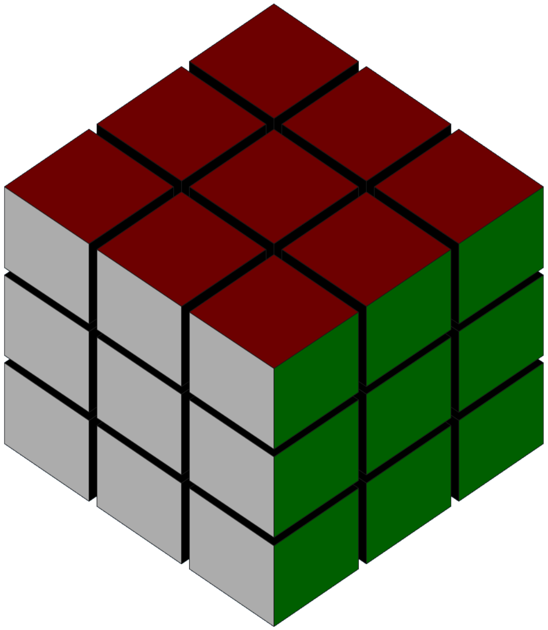
Hiermit endet Schritt 3.

Die Lösung des Würfels Schritt 4



$$\left(DX^{3}\right)^{3}$$

$$\rightarrow$$



Der Zug $(DX^3)^3$ ändert die Orientierung von drei Ecken. Er dreht die drei betroffenen Ecken jeweils um 120° im Uhrzeigersinn. Durch Anwenden des Zuges auf die falsch orientierten Ecken, können wir den Würfel vollständig lösen.

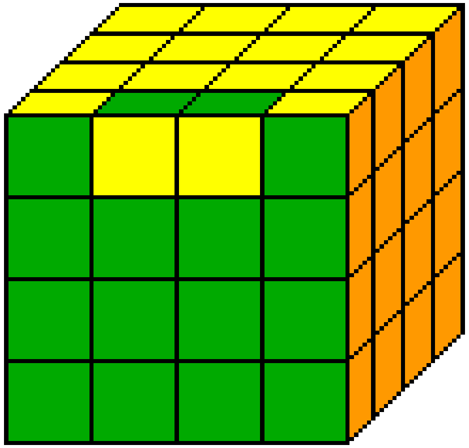
Der Gottes-Algorithmus

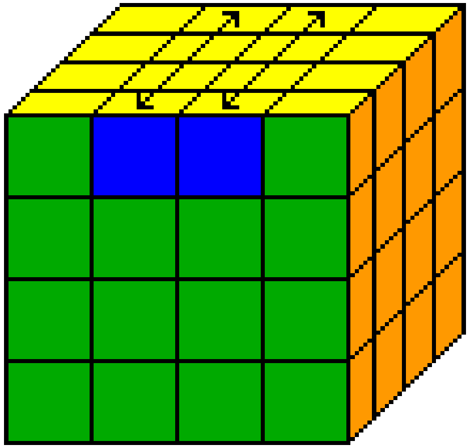
Im Juli 2010 können Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson und John Dethridge beweisen, dass der Würfel aus jeder Position mit nur 20 (möglicherweiße 180° Drehungen) gelöst werden kann. Seit 1995 ist eine Position bekannt, für die genau 20 Züge zum Lösen benötigt werden („Superflip“ = alle Kanten falsch orientiert).

Der Beweis ging mit Hilfe des Rechenzentrums von Google, das dem Forscherteam umgerechnet 35-Jahre an Rechnerarbeit zur Verfügung stellte. Außerdem wurde das Problem in **2,217,093,120** Mengen mit jeweils **19,508,428,800** (wurde nochmal auf **55,882,296** reduziert) Positionen aufgeteilt.

Verallgemeinerung auf nxnxn-Würfel

Baue zunächst alle Mitten zusammen, dann die Kanten. Danach muss nur ein 3x3x3 Würfel gelöst werden.





<u>Besonderheiten:</u>

1. Keine echten Mitten vorhanden, falls n gerade.

2. Eine Kante falsch orientiert, oder das mittlere Kantenteil anders orientiert als die äußeren Kantenteile.

3. Genau zwei (3x3x3) Kanten vertauscht. Kann nur bei geraden n auftreten.

Rubiks mit Motiv

Beim Rubikscube mit Motiv gibt es noch einen weiteren Spezialfall. Die Mitten können verdreht sein. Es können aber nur genau zwei Mittelteile um 90° verdreht sein, oder eins um 180°.

Quellen

- „Etüden“ , J. Richter-Gebert
- Lineare Algebra 1, Skript von G. Kemper WS 2012
- http://www.speedcube.de/4x4_parities.php
- http://www.rubiks.com/world/history.php
- http://www.cube20.org
- http://www.mjasmund.de/down/mittelstueck.pdf

Und Jetzt?

Ausprobieren !