Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

SS 2012
Blatt 5

Angewandte Geometrie

Geometrische Modellierung eines Roboters mit zwei Drehgelenken

Im euklidischen Raum E^3 seien $\{O; x_1, x_2, x_3\}$ ein kartesisches Koordinatensystem, a die gerichtete Gerade durch den Ursprung O in x_3-Richtung und b die gerichtete Gerade durch $P(1, 0, 0)$ in x_2-Richtung. Die Punkte $X \in E^3$ werden zunächst um die Achse a durch den Winkel α in die jeweilige Lage X^* und anschließend um die Achse b durch den Winkel β in die Lage X^{**} gedreht. Für die Geraden $g \subset E^3$ werden die entsprechenden Bezeichnungen g^* und g^{**} verwendet.

a) Beispiel für Vorwärtsrechnung:

Man bestimme die Koordinatenvektoren $\vec{x}^{**}$ der Punkte X^{**} in Abhängigkeit von α, β und den Koordinatenvektoren $\vec{x}$ der Punkte X. Ebenso gebe man die Richtungsvektoren $\vec{r}^{**}$ der Geraden g^{**} in Abhängigkeit von α, β und den Richtungsvektoren $\vec{r}$ der Geraden g an.

b) Beispiel für Rückwärtsrechnung:

b1) Der Punkt $Q(-1, 0, 1)$ soll in die x_1x_2-Ebene ε überführt werden. Man gebe eine (notwendige und hinreichende) Bedingung für die zugehörigen Winkel α und β an und bestimme den Ort aller möglichen Lagen von Q^{**} in ε.

b2) Man bestimme alle Winkelpaare (α, β), für welche die Strecke $\overline{QS}$ (mit $S(0, 1, 2)$) in die Ebene ε befördert wird und berechne die Endpositionen $\overline{Q^{**}S^{**}} \subset \varepsilon$. (Anwendung: Ablegen eines Stabes auf einer ebenen Unterlage.)

c) Interpretation der Gesamtbewegung $X \mapsto X^{**}$ als Schraubung:

c1) Man ermittle alle Geraden $g \subset E^3$, die zu ihrer Endlage g^{**} parallel sind.

c2) Für $\alpha = \beta = 90^\circ$ interpretiere man die Bewegung der Punkte $X \in E^3$ in die Lagen X^{**} als Schraubung.