Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

Angewandte Geometrie

Gegeben seien zwei Kegelschnitte k_A, k_B in der euklidischen Ebene durch die Gleichungen

$$k_A : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \qquad (a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$$

$$k_B : b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + b_{00} = 0 \qquad (b_{11}, b_{12}, b_{22}) \neq (0,0,0)$$

bezüglich eines kartesischen xy-Koordinatensystems.

Man gebe einen Algorithmus mit allen nötigen Fallunterscheidungen an zur Ermittlung der (reellen) Schnittpunkte von k_A mit k_B.

Hinweis 1: Man verwende homogene Koordinaten und ermittle einen entarteten Kegelschnitt des von k_A und k_B aufgespannten Kegelschnittbüschels.

Hinweis 2: Die Bestimmung einer reellen Nullstelle eines reellen Polynoms dritten Grades werde dabei als elementar angesehen.

Lösung:

Einführung homogener Koordinaten in der euklidischen Ebene E^2:

$$x_1 := x \cdot x_0, \quad x_2 := y \cdot x_0, \quad x_0 \neq 0$$

Die um die Fernpunkte mit $x_0 = 0$ erweiterte euklidische Ebene ist die **projektiv erweiterte** oder die **projektiv abgeschlossene** euklidische Ebene P^2.
Gleichung der Kegelschnitte in homogenen Koordinaten:

$$k_A : a_{11}(\frac{x_1}{x_0})^2 + 2a_{12}\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} + a_{22}(\frac{x_2}{x_0})^2 + 2a_{01}\frac{x_1}{x_0} + 2a_{02}\frac{x_2}{x_0} + a_{00} = 0$$

Die Voraussetzung $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$ lassen wir vorübergehend weg. Um auch die Voraussetzung $x_0 \neq 0$ weglassen zu können, multiplizieren wir die Gleichung mit x_0^2 und erhalten für den projektiv abgeschlossenen Kegelschnitt (mit Fernpunkten):

$$k_A^p : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

Mit $a_{21} := a_{12}$, $a_{10} := a_{01}$, $a_{20} := a_{02}$ und

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =: A$$

lässt sich dann die Gleichung von k_a^p schreiben in der Gestalt:

$$k_A^p : \vec{x}^T A \vec{x} = 0.$$

Dabei ist $A \neq O$ und $A^T = A$. Entsprechend erhält man für k_B^p:

$$k_B^p : \vec{x}^T B \vec{x} = 0, \qquad B \neq O, \qquad B^T = B.$$

Zwischenbemerkung 1: Jede Gerade PQ mit $P(\vec{p}) \neq Q(\vec{q})$ schneidet jede Quadrik $Q^{n-1} : \vec{x}^T C \vec{x} = 0$ mit $C \neq O$, $C^T = C$ in 0, 1 oder 2 (reellen) Punkten, oder es gilt: $PQ \subset Q^{n-1}$.

Beweis: Mit $\vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$ gilt:

$$0 = (\lambda\vec{p} + \mu\vec{q})^T C(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda^2 \vec{p}^T C \vec{p} + 2\lambda\mu\vec{p}^T C \vec{q} + \mu^2 \vec{q}^T C \vec{q} \quad (*)$$

1. Fall: $\vec{p}^T C\vec{p} = 0 \ \wedge \ \vec{p}^T C\vec{q} = 0 \ \wedge \ \vec{q}^T C\vec{q} = 0 \implies PQ \subset Q^{n-1}$
2. Fall: $\vec{p}^T C\vec{p} = 0 \ \wedge \ \vec{p}^T C\vec{q} \neq 0 \ \wedge \ \vec{q}^T C\vec{q} = 0 \implies PQ \cap Q^{n-1} = \{P, Q\}$
3. Fall: $\vec{p}^T C\vec{p} \neq 0 \ \vee \ \vec{q}^T C\vec{q} \neq 0 \implies$ (*) ist quadratische Gleichung in $\frac{\lambda}{\mu}$ bzw. in $\frac{\mu}{\lambda}$ mit 0, 1 oder 2 (reellen) Lösungen.

Zwischenbemerkung 2: Ist $\vec{x}^T C\vec{x} = 0$ die Gleichung einer Quadrik Q^{n-1} in homogenen Koordinaten in einem projektiv erweiterten euklidischen oder auch affinen Raum P^n, und ist $S(\vec{s})$ ein Punkt mit der Eigenschaft $C\vec{s} = \vec{o}$, so hat S auch die folgende Eigenschaft: Jede Gerade durch S hat mit der Quadrik keinen weiteren Punkt gemeinsam oder sie liegt ganz auf der Quadrik.

Beweis: Ist $T(\vec{t})$ ein beliebiger Punkt in P^n, so ist mit $\vec{x} = \lambda\vec{s} + \mu\vec{t}$:

$$0 = \vec{x}^T C\vec{x} = (\lambda\vec{s} + \mu\vec{t})^T C(\lambda\vec{s} + \mu\vec{t}) = \lambda^2 \vec{s}^T C\vec{s} + 2\lambda\mu\vec{s}^T C\vec{t} + \mu^2 \vec{t}^T C\vec{t}$$

$$\iff \mu = 0 \vee \vec{t}^T C\vec{t} = 0$$

$\iff X = S$ oder $T \in Q^{n-1}$.

Zwischenbemerkung 3: Für Kegelschnitte in P^2: Zu $k_C^p : \vec{x}^T C\vec{x}$ mit $\det(C) = 0$ gibt es $S(\vec{s})$ mit $C\vec{s} = \vec{o}$, und k_C^p besteht dann aus S, aus einer Geraden durch S oder aus zwei Geraden durch S.

Kegelschnittbüschel: Ist $k_A^p \neq k_B^p$, und ist

$$C := \lambda A + \mu B \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

so ist

$$k_C^p : \vec{x}^T C\vec{x} = 0$$

ein Kegelschnitt aus dem von k_A^p und k_B^p aufgespannten **Kegelschnittbüschel**, für den im Fall $\lambda \neq 0 \neq \mu$ gilt:

$$k_A^p \cap k_B^p = k_A^p \cap k_C^p = k_B^p \cap k_C^p.$$

Die Gleichung

$$0 = \det(C) = \det(\lambda A + \mu B)$$

hat die Lösung $\lambda = 0$ (wenn $\det(B) = 0$) oder sie ist von drittem Grad in $\frac{\mu}{\lambda}$, hat also mindestens eine reelle Lösung in $\frac{\mu}{\lambda}$. Im folgenden sei C so bestimmt, dass $0 = \det(C)$. (Elementar nach Hinweis 2!)

Nach Zwischenbemerkung 3 gibt es ein $S(\vec{s})$ mit $C\vec{s} = \vec{o}$, und k_C^p besteht aus keiner, einer oder zwei reellen Geraden durch S.

Die Gerade

$$g : s_0x_0 + s_1x_1 + s_2x_2 = 0$$

enthält S nicht. Es gilt:

$$g = PQ$$

mit z.B.
$P = (s_2, 0, -s_0)$, $Q = (0, s_2, -s_1)$, falls $s_2 \neq 0$ und
$P = (0, 0, 1)$, $Q = (s_1, -s_0, 1)$, falls $s_2 = 0$.

(Das war eine nötige Fallunterscheidung im Algorithmus, die durch den Kalkül bedingt ist!)

PQ schneiden mit k_C^p:
1.Fall: kein Schnittpunkt: Dann k_C^p Doppelpunkt S. Liegt S auf k_A^p?

$$k_A^p \cap k_B^p = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ S \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{c} S \notin k_A^p \\ S \in k_A^p \end{array} \right\}$$

2. Fall: ein Schnittpunkt S_1. Dann ist k_C^p die Doppelgerade SS_1 und $k_A^p \cap k_B^p = k_A^p \cap SS_1$.
3. Fall: zwei Schnittpunkte S_1, S_2. Dann ist $k_C^p = SS_1 \cup SS_2$ und $k_A^p \cap k_B^p = (k_A^p \cap SS_1) \cup (k_A^p \cap SS_2)$.

Bemerkung: Die ermittelten Schnittpunkte können komplex sein (das merkt man gleich) oder Fernpunkte (das merkt man bei der Ermittlung der kartesischen Koordinaten).

Beispiel dazu:

(Aus der Semestralprüfung zur Vorlesung "Angewandte Geometrie" im Sommersemester 2006)

In einer euklidischen Ebene E^2 seien bezüglich eines kartesischen xy-Koordinatensystems die beiden Kegelschnitte k_A, k_B gegeben durch die Gleichungen:

$$k_A : 9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0,$$
$$k_B : 9x^2 + 4y^2 - 12xy - 20y + 40 = 0.$$

a) Geben Sie Matrizen A, B explizit an, so dass in den homogenen Koordinaten $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ mit $x_1 = x \cdot x_0$, $x_2 = y \cdot x_0$ die Kegelschnitte k_A, k_B die folgenden Gleichungen haben:

$$k_A : \vec{x}^T A \vec{x} = 0, \qquad k_B : \vec{x}^T B \vec{x} = 0.$$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -4 \\ -18 & 9 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 40 & 0 & -10 \\ 0 & 9 & -6 \\ -10 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Ermitteln Sie eine Matrix C der Gestalt

$$C = \lambda \cdot A + \mu \cdot B$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass das Kegelschnitt k_C mit der Gleichung

$$k_C : \vec{x}^T C \vec{x} = 0$$

die Vereinigung zweier Geraden g, h ist.

HINWEIS: Bevor Sie anfangen, zu rechnen, versuchen Sie, ein C zu erraten, indem Sie einfache Möglichkeiten für C ausprobieren, etwa $A + B$, $A - B$, ...

(Tipp zur Vereinfachung der folgenden Teilaufgaben: Nutzen Sie die Homogenität um mit einer Matrix C weiterzurechnen, die möglichst betragskleine ganze Zahlen als Einträge hat.)

Lösung:

$$\det(A - B) = \det \begin{pmatrix} -36 & -18 & 6 \\ -18 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$0 - 18 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot (-18) \cdot 6 - (0 + 6 \cdot 6 \cdot (-36) + 0) = 0$$

$$C := \frac{1}{6} \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt $S(s_0, s_1, s_2)$ der beiden Geraden g und h.

Lösung:

$$\vec{o} = C\vec{s} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6s_0 - 3s_1 + s_2 \\ -3s_0 + s_2 \\ s_0 + s_1 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung ist

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S(1, -1, 3).$$

d) Schreiben Sie die Gleichung von k_C explizit in der Gestalt

$$k_C : F(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Lösung:

$$k_C : 2x_1x_2 - 6x_0x_1 + 2x_0x_2 - 6x_0^2 = 0.$$

e) Ermitteln Sie einen von S verschiedenen Punkt G auf g und einen von S verschiedenen Punkt H auf h. (Welche der beiden Geraden auf k_C Sie dabei mit g bezeichnen, ist Ihnen überlassen.)

Lösung:

Die Gerade $s : x_0 - x_1 + 3x_2 = 0$ enthält S nicht. Sie hat die Parameterdarstellung

$$s : \vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt $s \cap k_C$:

$$0 = 2(\sigma + 3\tau)\tau - 6\sigma(\sigma + 3\tau) + 2\sigma\tau - 6\sigma^2 = -14\sigma\tau + 6\tau^2 - 12\sigma^2$$

$\sigma = 0$ liefert keine nichttriviale Lösung, also o.E. $\sigma := 1$:

$$3\tau^2 - 7\tau - 6 = 0 \Rightarrow \tau_{1,2} = \frac{1}{6} \cdot (7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 3 \cdot 6}) = \frac{7}{6} \pm \frac{11}{6}$$
$$\Rightarrow \tau_1 = 3, \tau_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$G(1, 10, 3), \qquad H(1, -1, -\frac{2}{3}) = H(3, -3, -2).$$

f) Geben Sie je eine Parameterdarstellung der Geraden g, h bezüglich des kartesischen xy-Koordinatensystems an.

(Tipp: Wählen Sie die Länge des Richtungsvektors jeweils möglichst einfach!)

Lösung:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (u \in \mathbb{R})$$
$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (v \in \mathbb{R})$$

g) Ermitteln Sie sämtliche rellen Schnittpunkte von g mit k_A und von h mit k_A.

Lösung:

$g \cap k_A : 0 = 9(-1+u)^2 + 4 \cdot 3^2 - 36 \cdot (-1+u) - 8 \cdot 3 + 4 =$
$9u^2 - 18u + 9 + 36 + 36 - 36u - 24 + 4 = 9u^2 - 54u + 61$

$$\Longrightarrow u_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 9 \cdot 61}}{2 \cdot 9} = 3 \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9^2 - 61} = 3 \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5}$$

$$g \cap k_A = \{S_1 := (2 + \frac{2}{3}\sqrt{5}, 3),\ S_2 := (2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}, 3)\}.$$

$h \cap k_A : 0 = 9(-1)^2 + 4 \cdot (3+v)^2 - 36 \cdot (-1) - 8 \cdot (3+v) + 4 =$
$9 + 36 + 24v + 4v^2 + 36 - 24 - 8v + 4 = 4v^2 + 16v + 61$

$$\Longrightarrow v_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 61}}{2 \cdot 4} \notin \mathbb{R}$$

$$h \cap k_A = \emptyset.$$

h) Geben Sie sämtliche Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte k_A und K_B an.

Lösung:

$$k_A \cap k_B = \{S_1, S_2\}.$$