Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 11 - Musterlösung

Aufgabe 1: Elemente in $H_1(T^2)$

Wir fixieren den Erzeuger $[S] \in H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ mit $S : I \to S^1 \; ; \; t \mapsto e^{2\pi i t}$. Eine Basis von $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ ist dann durch die Elemente $\phi_*[S]$ und $\psi_*[S]$ gegeben, mit den Abbildungen

$$\phi : S^1 \to T^2 \; ; \; z \mapsto (z, 1)$$

und

$$\psi : S^1 \to T^2 \; ; \; z \mapsto (1, z).$$

Drücken Sie die Homologieklasse $\delta_*[S] \in H_1(T^2)$ in dieser Basis aus, wobei δ die Diagonale ist:

$$\delta : S^1 \to T^2 \; ; \; z \mapsto (z, z)$$

Lösung zu Aufgabe 1:

Da die Fundamentalgruppe von T^2 abelsch ist, können wir $H_1(T^2)$ mit $\pi_1(T^2, (1, 1))$ identifizieren. Unter dieser Identifizierung ist

$$\phi_*[S] = [\phi] \quad , \quad \psi_*[S] = [\psi] \quad , \quad \delta_*[S] = [\delta]$$

und wir zeigen nun: $[\delta] = [\phi] + [\psi] \in \pi_1(T^2, (1, 1))$. Dies liefert zum Beispiel die folgende Homotopie:

$$f : I \times I \to T^2 \; ; \; (t, s) \mapsto \left(e^{2\pi i \max\{(1+s)t, 1\}}, e^{2\pi i \min\{(1+s)t - s, 0\}}\right)$$

Wir können aber auch $\phi_*[S] = [T_1]$, $\psi_*[S] = [T_2]$ und $\delta_*[S] = [T_3]$ schreiben mit den geschlossenen 1-Würfeln

$$T_1 : I \to S^1 \; ; \; t \mapsto (e^{2\pi i t}, 1) \quad , \quad T_2 : I \to S^1 \; ; \; t \mapsto (1, e^{2\pi i t}) \quad \text{und} \quad T_3 : I \to S^1 \; ; \; t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i t}).$$

Dann zeigt man $[T_1] + [T_2] = [T_3]$ durch explizite Angabe eines 2-Würfels $T : I^2 \to T^2$ mit

$$\partial T = T_1 + T_2 - T_3.$$

Dies tut zum Beispiel $T(t_1, t_2) := \left(e^{2\pi i((1-t_2)t_1 + t_2)}, e^{2\pi i t_2}\right)$.

Aufgabe 2: Homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Es seien U und V homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass dann auch $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

Folgern Sie, dass für jeden Homöomorphismus $f : A \to B$ zwischen Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B} \quad \text{und} \quad f(\partial A \cap A) = \partial B \cap B.$$

Lösung zu Aufgabe 2:

Vermittels stereographischer Projektion befördern wir U und V zu homöomorphen Teilmengen U', V' der S^n. Da das Bild von $\mathbb{R}^n$ unter der stereographischen Projektion in S^n offen ist, ist U' dort ebenfalls offen. Nach dem Satz über die Gebietsinvarianz aus der Vorlesung ist damit auch V' in S^n offen, also ist auch $V \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Ist $x \in A$ ein innerer Punkt, so gibt es per Definition eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U \subset A$. Da $f|_U : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist, muss $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ nach dem gerade bewiesenen Satz ebenfalls offen sein. Ferner gilt $f(x) \in f(U) \subset B$ und damit ist $f(x) \in B$ ebenfalls ein innerer Punkt.

Die Inklusion $\overset{\circ}{B} \subset f(\overset{\circ}{A})$ folgt analog durch Verwendung des Homöomorphismus $f^{-1} : B \to A$.

Die Gleichheit $f(\partial A) = \partial B$ folgt aus dem gerade gezeigten durch Bildung von Komplementen.

Aufgabe 3: Mengentopologie

Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv.

a) Zeigen Sie: Ist $k = n$, so ist f eine offene Abbildung, also $f : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus.

b) Finden Sie ein Beispiel mit $k < n$, so dass f zwar stetig und injektiv ist, aber $f : U \to f(U)$ kein Homöomorphismus ist.

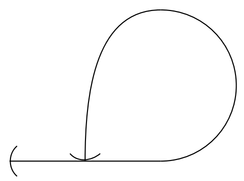
c) Zeigen Sie, dass der Fall $k > n$ nicht eintreten kann.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Es sei $U' \subset U$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f(U') \subset \mathbb{R}^n$ dann ebenfalls offen ist. Dazu sei $y = f(x) \in f(U')$ mit $x \in U'$. Da $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, ist auch $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir finden also einen offenen Ball B um x, so dass auch der Abschluss $\overline{B} =: D$ ganz in U' enthalten ist. Dieser abgeschlossene Ball ist kompakt, also ist die Einschränkung $f|_D$ ein Homöomorphismus auf das Bild $f(D) =: E$, denn eine stetige und bijektive Abbildung von einem Kompaktum ist ein Homöomorphismus.

Nach Aufgabe 2 wird nun $\overset{\circ}{D}= B$ durch f auf $\overset{\circ}{E}$ abgebildet. Insbesondere ist $f(x) \in E$ ein innerer Punkt. Wegen $E \subset f(U')$ ist damit auch $y = f(x) \in f(U')$ ein innerer Punkt. Also ist $f(U')$ offen.

b)



c) Ist $k > n$, so erhalten wir durch eine Einbettung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine stetige und injektive Abbildung

$$F := \phi \circ f : U \to \mathbb{R}^k$$

und sind somit in der Situation von Aufgabenteil a). Es folgt, dass $F(U) \subset \mathbb{R}^k$ offen ist. Das Bild $F(U)$ liegt aber in einem echten Unterraum von $\mathbb{R}^k$ und kann damit nicht offen sein. Also ist $k > n$ nicht möglich.

Aufgabe 4: Eingebettete Würfel in $\mathbb{R}^n$

Es sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die homöomorph ist zu I^k.

a) Zeigen Sie, dass notwendig $k \leq n$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Homologiegruppen von $\mathbb{R}^n \setminus Y$.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Ist $f : I^k \to Y$ der Homöomorphismus, so ist die Einschränkung von f auf das Innere von I^k eine stetige und injektive Abbildung von einer offenen Menge im $\mathbb{R}^k$ in den $\mathbb{R}^n$. Nach Aufgabe 3 muss also $k \leq n$ gelten.

b) Wir betrachten $\mathbb{R}^n \subset S^n$ als Teilmenge (vermittels der stereographischen Projektion) und betrachten die Homologiesequenz für das Paar $(S^n \setminus Y, \mathbb{R}^n \setminus Y)$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_k(S^n \setminus Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(S^n \setminus Y, \mathbb{R}^n \setminus Y) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus Y) \arrow[r] & \widetilde{H}_{k-1}(S^n \setminus Y) \arrow[d, equal] \\
0 & H_k(S^n, \mathbb{R}^n) & & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist also $\widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus Y) \cong H_k(S^n, \mathbb{R}^n) \cong \widetilde{H}_k(S^n)$.