Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Algebraische Topologie
Sommersemester 2011

Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Elemente in $H_1(T^2)$

Wir fixieren den Erzeuger $[S] \in H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ mit $S : I \to S^1 \; ; \; t \mapsto e^{2\pi i t}$. Eine Basis von $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ ist dann durch die Elemente $\phi_*[S]$ und $\psi_*[S]$ gegeben, mit den Abbildungen

$$\phi : S^1 \to T^2 \; ; \; z \mapsto (z, 1)$$

und

$$\psi : S^1 \to T^2 \; ; \; z \mapsto (1, z).$$

Drücken Sie die Homologieklasse $\delta_*[S] \in H_1(T^2)$ in dieser Basis aus, wobei δ die Diagonale ist:

$$\delta : S^1 \to T^2 \; ; \; z \mapsto (z, z)$$

Aufgabe 2: Homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Es seien U und V homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass dann auch $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

Folgern Sie, dass für jeden Homöomorphismus $f : A \to B$ zwischen Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\mathring{A}) = \mathring{B} \quad \text{und} \quad f(\partial A \cap A) = \partial B \cap B.$$

Aufgabe 3: Mengentopologie

Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv.

a) Zeigen Sie: Ist $k = n$, so ist f eine offene Abbildung, also $f : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus.

b) Finden Sie ein Beispiel mit $k < n$, so dass f zwar stetig und injektiv ist, aber $f : U \to f(U)$ kein Homöomorphismus ist.

c) Zeigen Sie, dass der Fall $k > n$ nicht eintreten kann.

Aufgabe 4: Eingebettete Würfel in $\mathbb{R}^n$

Es sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die homöomorph ist zu I^k.

a) Zeigen Sie, dass notwendig $k \leq n$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Homologiegruppen von $\mathbb{R}^n \setminus Y$.

Informationen: Die Aufgaben werden in der Übung am 21. Juli besprochen.