Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Homologie des n-Torus

Berechnen Sie die Homologie des n-Torus $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ Faktoren}}$.

Anleitung: Schreiben Sie $T^n \approx \left(T^{n-1} \times E^1_+\right) \cup \left(T^{n-1} \times E^1_-\right)$ und verwenden Sie die Mayer-Vietoris Sequenz um per Induktion zu zeigen, dass $H_k(T^n)$ isomorph ist zu $\mathbb{Z}^r$ mit $r = \binom{n}{k}$.

Aufgabe 2: Einpunktvereinigungen

Es seien X und Y topologische Räume mit Basispunkten $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$, die jeweils Deformationsretrakt einer offenen Menge $U_0 \subset X$ bzw. $V_0 \subset Y$ sind. Wir bilden die *Einpunktvereinigung* (auch *Wedge-Produkt* genannt) durch den Quotienten

$$X \vee Y := (X \sqcup Y)/\{x_0, y_0\}.$$

Beweisen Sie $\widetilde{H}_i(X \vee Y) \cong \widetilde{H}_i(X) \oplus \widetilde{H}_i(Y)$ für alle i.

Aufgabe 3: Kegel

Ist X ein topologischer Raum, so nennt man den Quotienten

$$C(X) := (X \times I)/(X \times \{1\})$$

den *Kegel über* X. Zeigen Sie, dass für Kegel stets gilt $\widetilde{H}_i(C(X)) = 0$ für alle i.

Aufgabe 4: Einhängungen

Ist X ein topologischer Raum, so nennt man den Quotienten

$$S(X) := C(X)/(X \times \{0\})$$

die *Einhängung von* X. Berechnen Sie $H_i(S(X))$ für alle i aus der Homologie von X.

Aufgabe 5: Sphärische Homologie

Wir nennen eine Klasse $a \in H_k(X)$ *sphärisch*, falls es eine Klasse $\alpha \in H_k(S^k)$ und eine stetige Abbildung $f : S^k \to X$ gibt mit

$$a = f_*\alpha.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle wegzusammenhängenden Räume X ist jede Klasse $a \in H_1(X)$ stets sphärisch.

b) Ist $k \geq 2$ und $X = T^n$ ein Torus und $a \in H_k(X)$ sphärisch, so folgt schon $a = 0$.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die universelle Überlagerung des Torus, um $f_* = 0$ zu zeigen.)

Informationen: Die Aufgaben werden in der Übung am 14. Juli besprochen.