PROF. DR. JOSEF DORFMEISTER — DR. JAN WEHRHEIM

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: Homologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$

Bestimmen Sie die Homologiegruppen des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Anleitung: Zur Berechnung von $H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ schreibt man $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx D^2/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim -x$ auf dem Rand S^1 von D^2. Dann zeigt man zum Beispiel

$$H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong H_2(D^2/\sim, \{0\}) \cong H_2(D^2/\sim, B^2) \cong H_2((D^2 \setminus \{0\})/\sim, B^2 \setminus \{0\})$$

mit dem offenen Einheitsball $B^2 \subset D^2$. Nun betrachtet man die Homologiesequenz für das letzte Paar und verwendet, dass $(D^2 \setminus \{0\})/\sim$ genau wie $B^2 \setminus \{0\}$ den Homotopietyp von S^1 hat und die Abbbildung

$$i_* : H_1(B^2 \setminus \{0\}) \to H_1((D^2 \setminus \{0\})/\sim)$$

nicht die Nullabbildung ist.

Aufgabe 2: Homologie und Überlagerungen

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $c \in C_n(X)$ eine Kette in X. Zeigen Sie, dass es dann stets eine Kette $\tilde{c} \in C_n(\widetilde{X})$ gibt mit $c = p \circ \tilde{c}$ und ferner auch $\partial c = p \circ \partial\tilde{c}$ gilt.

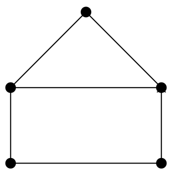
Warum ist die Abbildung $p_* : H_n(\widetilde{X}) \to H_n(X)$ dennoch im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv?

Aufgabe 3: H_1 von topologischen Gruppen

Es sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie $H_1(G) \cong \pi_1(G, e)$.

Aufgabe 4: Homologie eines Graphen

Wir betrachten den folgenden Graphen X:



Bestimmen Sie die Eulercharakteristik von X, den Rang von $H_0(X)$ und $H_1(X)$ und geben Sie schließlich Basen von $H_0(X)$ und $H_1(X)$ an.

Aufgabe 5: Der Abbildungsgrad II

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ den Abbildungsgrad von $f : S^1 \to S^1$; $z \mapsto z^k$.

Informationen: Die Aufgaben werden in der Übung am 7. Juli besprochen.