Übungsblatt 8 - Musterlösung

Aufgabe 1: Erzeuger von $H_n(S^n)$

Geben Sie für alle $n \geq 1$ eine Kette $c \in Z_n(S^n)$ an, so dass die repräsentierte Klasse $[c] \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger ist.

Lösung zu Aufgabe 1:

Wir schreiben $S^0 = \{M, P\}$ mit den zwei Punkten $M = -1$ und $P = +1$ in $\mathbb{R}$. Dann ist

$$c_0 := P - M = 1P + (-1)M \in C_0(S^0)$$

eine Kette im Kern der Augmentierung ϵ und definiert somit eine Klasse $[c_0] \in \widetilde{H}_0(S^0)$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(S^0) \xrightarrow{i_*} H_0(S^0) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

wissen wir, dass $\widetilde{H}_0(S^0) \cong \ker(\epsilon_*)$ und wir zeigen, dass c_0 diesen Kern erzeugt: Einen beliebigen Zykel in $Z_0(S^0) = C_0(S^0)$ können wir per Definition stets schreiben als $aM + bP$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alle 1-Ketten in S^0 sind degeneriert, also ist $H_0(S^0) = C_0(S^0)$ und die Kette $aM + bP$ liegt genau dann im Kern von ϵ_*, wenn sie im Kern von ϵ liegt und das ist genau dann der Fall, wenn $a = -b$ ist und somit gilt

$$aM + bP = (-b)M + bP = b \cdot (1P + (-1)M) = b \cdot c_0.$$

Damit ist $[c_0] \in \widetilde{H}_0(S^0)$ ein Erzeuger.

Für $n \geq 1$ konstruieren wir eine analoge Zykel $c_n = P_n - M_n \in Z_n(S^n)$ mit stetigen Abbildungen $P_n, M_n : I^n \to S^n$ und zeigen anschließend per Induktion, dass $[c_n] \in H_n(S^n)$ ein Erzeuger ist.

Um die Formeln zu vereinfachen schreiben wir $I = [-1, 1]$. Die Formeln mit der üblichen Konvention für I erhält man dann durch den Homöomorphismus $[0, 1] \to [-1, 1]\ ;\ t \mapsto 2t - 1$.

Wir definieren zuerst stetige Abbildungen $\delta_n : I^n \to D^n$ induktiv durch $\delta_1 := \mathrm{id}|_{[-1,1]}$ und

$$\delta_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) := \left(\delta_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}), t_n \cdot \sqrt{1 - \|\delta_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1})\|^2}\right)$$

für $n \geq 2$. Ferner betrachten wir die Teilmengen $E^n_+, E^n_- \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$E^n_+ := \{x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \geq 0\} \quad \text{und} \quad E^n_- := \{x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \leq 0\}$$

und den Abbildungen

$$\pi_n : D^n \to E^n_+\ ;\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \textstyle\sum_{j=1}^n x_j^2}\right)$$

und

$$\mu_n : D^n \to E^n_-\ ;\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, -\sqrt{1 - \textstyle\sum_{j=1}^n x_j^2}\right).$$

Nun definieren wir

$$P_n := \pi_n \circ \delta_n : I^n \to E^n_+ \subset S^n \quad \text{und} \quad M_n := \mu_n \circ \delta_n : I^n \to E^n_- \subset S^n.$$

Es ist dann $c_n := P_n - M_n \in C_n(S^n)$ eine Kette und wir berechnen zunächst den Rand

$$\partial P_n : I^{n-1} \to S^n\ ;\ \partial P_n = \sum_{j=1}^n (-1)^j (A_j P_n - B_j P_n).$$

In den Summanden für $j = 1, \ldots, n-1$ setzt man in den Formeln für $A_j P_n$ und $B_j P_n$ eines der ersten $n - 1$ Argumente von $P_n = \pi_n \circ \delta_n$ auf ± 1. Damit gilt aber

$$\delta_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) = (\delta_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}), 0)\,,$$

denn es ist $\|\delta_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1})\| = 1$, falls eines der Argumente $t_1, \ldots, t_{n-1}$ gleich ± 1 ist. Somit hängen $A_j P_n$ und $B_j P_n$ für $j = 1, \ldots, n-1$ nicht mehr von dem letzten Argument t_n ab und sind somit degeneriert und tragen nicht zum Rand bei.

Es folgt $\partial P_n = (-1)^n(A_nP_n - B_nP_n)$ und wir berechnen

$$\begin{aligned} A_nP_n(t_1,\dots,t_{n-1}) &= P_n(t_1,\dots,t_{n-1},-1) \\ &= \pi_n\left(\delta_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1}), -\sqrt{1-\|\delta_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1})\|^2}\right) \\ &= \left(\delta_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1}), -\sqrt{1-\|\delta_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1})\|^2}, 0\right) \\ &= (M_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1}),0)\,. \end{aligned}$$

und analog $B_nP_n(t_1,\dots,t_{n-1}) = (P_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1}),0)$.

Die Berechnung von ∂M_n verläuft entsprechend und liefert $\partial M_n = (-1)^n(A_nM_n - B_nM_n)$ mit

$$A_nM_n = A_nP_n = (M_{n-1},0) \quad \text{und} \quad B_nM_n = B_nP_n = (P_{n-1},0).$$

Daraus folgt $\partial P_n = \partial M_n$ und somit ist $\partial c_n = \partial P_n - \partial M_n = 0$ und die Kette c_n tatsächlich ein Zykel.

Es sei nun $[c_{n-1}] \in \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ ein Erzeuger. Wir analysieren die Schritte im Beweis der Isomorphie $\widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \widetilde{H}_n(S^n)$ und zeigen so, dass dann $[c_n] \in \widetilde{H}_n(S^n)$ auch ein Erzeuger ist.

Der erste Schritt ist der Isomorphismus

$$\partial_* : H_n(E^n_+, S^{n-1}) \to \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}).$$

Wir finden das Urbild $[(-1)^{n+1}P_n] \in H_n(E^n_+, S^{n-1})$ von $[c_{n-1}]$, denn es gilt

$$\partial\left((-1)^{n+1}P_n\right) = (-1)^{n+1}\partial P_n = (-1)^{2n+1}(A_nP_n - B_nP_n) = -\left((M_{n-1},0) - (P_{n-1},0)\right) = c_{n-1}.$$

Der zweite Schritt ist die Anwendung des Ausschneidungssatzes zum Beweis der Tatsache, dass die von der Inklusion $(E^n_+, S^{n-1}) \to (S^n, E^n_-)$ induzierte Abbildung

$$H_n(E^n_+, S^{n-1}) \to H_n(S^n, E^n_-)$$

ein Isomorphismus ist. Es folgt, dass $[(-1)^{n+1}P_n] \in H_n(S^n, E^n_-)$ ein Erzeuger ist.

Im abschließenden Schritt benötigen wir ein Urbild unter dem Isomorphismus

$$i_* : \widetilde{H}_n(S^n) \to H_n(S^n, E^n_-).$$

Dafür müssen wir eine beliebige Kette in E^n_- hinzunehmen, welche gerade den Rand von $(-1)^{n-1}P_n$ in S^n kompensiert. Dies geschieht zum Beispiel durch $-(-1)^{n-1}M_n$, denn M_n ist eine Kette in E^n_-, die genau den gleichen Rand hat wie P_n.

Wir folgern also, dass $[(-1)^{n-1}(P_n - M_n)]$ ein Erzeuger von $\widetilde{H}_n(S^n)$ ist, aber damit ist auch $[c_n]$ ein Erzeuger.

Aufgabe 2: Invarianz der Dimension

Beweisen Sie, dass es für $m \neq n$ keinen Homöomorphismus $\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^n$ geben kann.

Lösung zu Aufgabe 2:

Ohne Einschränkung sei $m < n$. Ist $m = 0$, so gibt es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, da $\mathbb{R}^0$ endlich aber $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ unendlich ist.

Sei nun $m \geq 1$. Ist $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so ist auch die Einschränkung

$$\Phi : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\phi(0)\}$$

ein Homöomorphismus. Das Komplement eines Punktes im $\mathbb{R}^k$ hat den gleichen Homotopietyp wie die S^{k-1}. Dies folgt aus der Homotopieäquivalenz

$$\Psi : \mathbb{R}^k \setminus \{x_0\} \times I \to \mathbb{R}^k \setminus \{x_0\}\ ;\ (x,t) \mapsto x_0 + \left(1 + t \cdot \frac{1 - \|x - x_0\|}{\|x - x_0\|}\right) \cdot (x - x_0),$$

und der Tatsache, dass $S^{k-1} \approx \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - x_0\| = 1\}$. Es folgt, dass

$$\Phi_* : \underbrace{\widetilde{H}_{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})}_{\cong \widetilde{H}_{m-1}(S^{m-1}) \cong \mathbb{Z}} \to \underbrace{\widetilde{H}_{m-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(0)\})}_{\cong \widetilde{H}_{m-1}(S^{n-1}) \cong 0}$$

ein Isomorphismus ist. Dies ist ein Widerspruch, es kann für $m \neq n$ also keinen solchen Homöomorphismus geben.

Aufgabe 3: Invarianz des Randes

Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $D^n \subset \mathbb{R}^n$ mit ihrem Rand $\partial D^n = S^{n-1}$ und dem Inneren $D^n \setminus \partial D^n = B^n$.

a) Bestimmen Sie die lokalen Homologiegruppen $H_i(D^n, D^n \setminus \{x\})$ für Punkte $x \in B^n$ im Innern und für Punkte $x \in S^{n-1}$ auf dem Rand der Kreisscheibe.

b) Zeigen Sie, dass jeder Homöomorphismus $f : D^n \to D^n$ das Innere B^n und den Rand S^{n-1} jeweils auf sich abbildet.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Es sei zunächst $x \in S^{n-1}$ auf dem Rand der Kreisscheibe. Dann ist $D^n \setminus \{x\}$ zusammenziehbar und somit gilt für alle i
$$H_i(D^n, D^n \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_i(D^n) = 0.$$
Es sei nun $x \in B^n$ im Innern der Kreisscheibe. Dann hat $D^n \setminus \{x\}$ den gleichen Homotopietyp wie S^{n-1}. Dies folgt aus einer analogen Homotopieäquivalenz wie in Aufgabe 2. Aus der Homologiesequenz für das Paar $(D^n, D^n \setminus \{x\})$ erhalten wir also
$$H_i(D^n, D^n \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i = n \\ 0 & \text{für } i \neq n \end{cases}$$

b) Ein Homöomorphismus $f : D^n \to D^n$ induziert Isomorphismen zwischen den lokalen Homologiegruppen der Punkte x und $f(x)$ für alle $x \in D^n$. Da sich die lokalen Homologiegruppen von Punkten im Innern und auf dem Rand der Kreisscheibe wie in Aufgabenteil a) berechnet unterscheiden, muss f das Innere und den Rand jeweils auf sich abbilden.

Aufgabe 4: Der Abbildungsgrad

Es sei $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung mit $\deg(f) \neq 0$. Zeigen Sie, dass f dann surjektiv ist.

Lösung zu Aufgabe 4:

Angenommen es ist $x \in S^n$ nicht im Bild von f enthalten. Dann können wir $f = i \circ g$ schreiben mit einer Abbildung $g : S^n \to S^n \setminus \{x\}$ und der Inklusion $i : S^n \setminus \{x\} \to S^n$. Für die induzierten Abbildungen gilt also ebenfalls

$$f_* = i_* \circ g_* : \widetilde{H}_n(S^n) \to \widetilde{H}_n(S^n).$$

Nun ist aber $S^n \setminus \{x\}$ zusammenziehbar und folglich ist $\widetilde{H}_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$ und damit $g_* = 0$. Es folgt $f_* = 0$ und somit $\deg(f) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 5: Gruppenwirkungen auf Sphären

a) Es sei G eine Gruppe, die frei durch Homöomorphismen auf einer Sphäre S^{2k} von gerader Dimension operiert. Zeigen Sie, dass entweder $G \cong \{0\}$ oder $G \cong \mathbb{Z}_2$ gelten muss.

b) Finden Sie freie Gruppenwirkungen durch Homöomorphismen auf Sphären S^{2k+1} von ungerader Dimension von Gruppen $G \cong \mathbb{Z}_n$ für alle $n \geq 1$.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Es sei $g \in G$ ein vom neutralen Element $e \in G$ verschiedenes Element. Der von g induzierte Homöomorphismus der S^{2k} hat also keine Fixpunkte und ist somit nach einem Satz aus der Vorlesung homotop zur Antipoden-Abbildung $x \mapsto -x$ und diese hat den Abbildungsgrad $(-1)^{2k+1} = -1$.

   Sind $g_1, g_2 \in G$ zwei vom neutralen Element $e \in G$ verschiedene Elemente, so haben also g_1 und g_2 jeweils den Abbildungsgrad -1. Es folgt, dass die Komposition $g_1 g_2$ den Abbildungsgrad $(-1) \cdot (-1) = 1$ hat. Daraus folgt $g_1 g_2 = e$. Insbesondere ist also auch $g_1 g_1 = e$ und damit $g_1 = g_2$.

   Es können also nur die folgenden zwei Fälle auftreten: Entweder $G \cong \{0\}$ besteht nur aus dem neutralen Element, oder es gibt ein vom neutralen Element verschiedenes Element $g \in G$. In dem Fall sind aber alle vom neutralen Element verschiedenen Elemente gleich g und somit ist $G = \{e, g\} \cong \mathbb{Z}_2$.

b) Auf $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}^k$ operiert die Gruppe S^1 durch Multiplikation mit komplexen Zahlen von Betrag 1. Diese Operation ist frei, denn jeder Punkt $x = (z_1, \ldots, z_k) \in S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$ hat mindestens eine Komponente $z_i \neq 0$. Ist also $\zeta \in S^1$ mit $\zeta.x = x$ gegeben, so folgt insbesondere $\zeta \cdot z_i = z_i$ und somit $\zeta = 1$.

   Wir können nun alle Gruppen $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 1$ als Untergruppe der S^1 darstellen und erhalten so freie Operationen auf allen Sphären von ungerader Dimension.