Übungsblatt 7 - Musterlösung

Aufgabe 1: Homologie relativ zum Rand

Wir betrachten den Zylinder $\Sigma = S^1 \times I$ mit seinen Randkomponenten

$$A_0 := S^1 \times \{0\} \quad \text{und} \quad A_1 := S^1 \times \{1\}.$$

Bestimmen Sie die relativen Homologiegruppen der Raumpaare $(\Sigma, \emptyset)$, (Σ, A_0) und $(\Sigma, A_0 \cup A_1)$.

Lösung zu Aufgabe 1:

Der Zylinder Σ hat den gleichen Homotopietyp wie S^1, es gilt also

$$H_i(\Sigma, \emptyset) \cong H_i(\Sigma) \cong H_i(S^1) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i \geq 2 \\ \mathbb{Z} & \text{für } i = 0, 1 \,. \end{cases}$$

Die Aussage zum Homotopietyp beweisen wir durch Angabe der beiden Homotopieäquivalenzen

$$f : \Sigma \to S^1 \,;\; (z,t) \mapsto z \quad \text{und} \quad g : S^1 \to \Sigma \,;\; z \mapsto (z, 0).$$

Dies sind in der Tat Homotopieäquivalenzen: Es gilt $f \circ g(z) = z$, diese Komposition ist also nicht nur homotop sondern gleich der Identität auf S^1. Die andere Komposition erfüllt $g \circ f(z,t) = (z,0)$ und diese ist homotop zur Identität auf Σ vermittels der Homotopie

$$\Phi : I \times \Sigma \to \Sigma \,;\; (s, (z,t)) \mapsto (z, s \cdot t),$$

denn es gilt $\Phi_0 := \Phi(0, -) = g \circ f$ und $\Phi_1 := \Phi(1, -) = \mathrm{id}_\Sigma$.

Wir berechnen nun die Homologie vom Zylinder relativ zu einer Randkomponente. Durch die Abbildung

$$\phi : \Sigma \to \mathbb{C} \,;\; (z,t) \mapsto (1+t) \cdot z$$

wird Σ homöomorph auf den Ring $R(1,2) := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \|z\| \leq 2\}$ abgebildet und $\phi(A_0) =: S(1)$ ist der Einheitskreis. Es folgt also zunächst für alle i

$$H_i(\Sigma, A_0) \cong H_i(R(1,2), S(1)) = H_i(D(2) \setminus B(1), D(1) \setminus B(1)),$$

wobei $D(r)$ die abgeschlossene Kreisscheibe von Radius r und $B(r)$ die offene Kreisscheibe von Radius r bezeichnet. Wir können nun nicht direkt den Ausschneidungssatz verwenden, denn der Abschluß von $B(1)$ ist genau $D(1)$ und dieser ist nicht im Innern von $D(1)$ enthalten. Wir dicken die Randkomponente daher etwas auf: Das Paar $(R(1,2), S(1))$ hat den gleichen Homotopietyp wie das Paar $(R(1,2), R(1,\frac{3}{2}))$. Die entsprechenden Homotopieäquivalenzen sind offensichtlich. Es gilt also

$$H_i(R(1,2), S(1)) \cong H_i(R(1,2), R(1,3/2)) = H_i(D(2) \setminus B(1), D(3/2) \setminus B(1)).$$

Nun ist der Abschluss von $B(1)$ im Innern von $D(3/2)$ enthalten und nach dem Ausschneidungssatz erhalten wir

$$H_i(\Sigma, A_0) \cong H_i(D(2), D(3/2)) \cong H_i(D(2), \{0\}) \cong \widetilde{H}_i(D(2)) \cong \widetilde{H}_i(\{0\}) = 0$$

für alle i. Dabei haben wir verwendet, dass die Kreisscheiben $D(r)$ zusammenziehbar sind, sowie das Ergebnis von Aufgabe 2 auf Blatt 6 für die Homologie relativ zu einem nicht-leeren zusammenziehbaren Raum.

Alternativ kann man die Homologie des Paares (Σ, A_0) auch durch die lange exakte Homologiesequenz bestimmen: Dabei nutzt man aus, dass die Inklusion $i : A_0 \to \Sigma$ wie oben gezeigt eine Homotopieäquivalenz ist und die Abbildungen i_* somit Isomorphismen.

Für die Homologie von Σ relativ zum ganzen Rand $A_0 \cup A_1$ verwenden wir die gleiche Abbildung $\phi : \Sigma \to \mathbb{C}$ wie oben, die Σ homöomorph auf den Ring $R(1,2)$ abbildet mit den Randkomponenten $\phi(A_0) =: S(1)$ und $\phi(A_1) =: S(2)$. Mit der gleichen Argumentation wie oben erhalten wir

$$H_i(\Sigma, \partial\Sigma) = H_i(\Sigma, A_0 \cup A_1) \cong H_i(D(2), S(2) \cup \{0\}) \cong H_i(D^1, S^1 \cup \{0\}).$$

Diese Gruppen können wir nun durch die Homologiesequenz (am einfachsten mit reduzierter Homologie) für Paare berechnen:

$$H_0(\Sigma, \partial\Sigma) \cong 0 \,,\; H_1(\Sigma, \partial\Sigma) \cong \mathbb{Z} \,,\; H_2(\Sigma, \partial\Sigma) \cong \mathbb{Z} \,,\; H_i(\Sigma, \partial\Sigma) \cong 0 \quad \text{für} \quad i > 2.$$

Aufgabe 2: Quotienten

Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir führen auf X die Äquivalenzrelation $R \subset X \times X$ ein durch

$$(x, y) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad (x = y) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ y \in A).$$

Die Menge der Restklassen wird durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum, den wir mit X/A bezeichnen. Beweisen Sie:

a) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so induziert die Projektion $X \to X/A$ einen Homöomorphismus

$$X \setminus A \ \approx \ (X/A) \setminus (A/A).$$

b) Ist A Deformationsretrakt einer offenen Menge $U \subset X$, so ist $U/A \subset X/A$ eine offene zusammenziehbare Umgebung von $A/A \in X/A$.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Die Projektion $\pi : X \to X/A$ ist per Definition der Quotiententopologie stetig und die Einschränkung $f : X \setminus A \to (X/A) \setminus (A/A)$ ist bijektiv (und stetig mit den Teilraumtopologien). Es ist also nur noch zu zeigen, dass f eine offene Abbildung ist. Es sei also $U \subset X \setminus A$ offen in der Teilraumtopologie. Damit ist $U = U' \setminus A$ mit einem offenen $U' \subset X$. Wir wollen zeigen, dass $f(U) \subset (X/A) \setminus (A/A)$ offen ist. Sei also $y = f(x)$ ein Punkt in $f(U)$. Da A abgeschlossen ist finden wir eine offene Umgebung $U'' \subset X$ von x mit $U'' \cap A = \emptyset$. Wir setzen dann

$$U''' := U' \cap U''$$

und überzeugen uns davon, dass $f(U''') \subset f(U)$ eine offene Umgebung von y ist. Also ist $f(U)$ offen.

b) U/A ist offen in X/A, denn das Urbild von U/A unter der Projektion $X \to X/A$ ist wegen $A \subset U$ genau U und somit offen. Ist ferner

$$\Phi : I \times U \to U \quad \text{mit} \quad \Phi(0, u) = u \ , \ \Phi(t, a) = a \ , \ \Phi(1, u) \in A$$

für alle $u \in U$, $t \in I$, $a \in A$ die Deformationsretraktion von U auf A, so induziert Φ eine Abbildung $\phi : I \times U/A \to U/A$. Dabei verwendet man $\Phi(a) = a$ für alle $a \in A$. Dieses ϕ ist ferner stetig. Dies ist eine universelle Eigenschaft der Quotiententopologie. Vermittels ϕ ist also A/A ein Deformationsretrakt von U/A und da $A/A \in X/A$ nur ein einzelner Punkt ist, ist U/A somit zusammenziehbar.

Aufgabe 3: Relative Homologie und Quotienten

Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene und nicht-leere Teilmenge, die Deformationsretrakt einer offenen Menge $U \subset X$ ist. Ein solches Paar (X, A) nennt man *gut*. Zeigen Sie, dass dann für alle i gilt:

$$H_i(X, A) \cong \widetilde{H}_i(X/A)$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Wegen $A \neq \emptyset$ ist $A/A \in X/A$ ein einzelner Punkt und somit gilt

$$\widetilde{H}_i(X/A) \cong H_i(X/A, A/A).$$

Da $A \subset U$ ein Deformationsretrakt ist, haben die Paare $(X/A, A/A)$ und $(X/A, U/A)$ den gleichen Homotopietyp. Hierbei verwenden wir das Resultat aus Aufgabe 2b. Es ist also

$$H_i(X/A, A/A) \cong H_i(X/A, U/A).$$

Der Ausschneidungssatz liefert nun

$$H_i(X/A, U/A) \cong H_i((X/A) \setminus (A/A), (U/A) \setminus (A/A)).$$

Und da A abgeschlossen ist, sind die Paare $((X/A) \setminus (A/A), (U/A) \setminus (A/A))$ und $(X \setminus A, U \setminus A)$ nach Aufgabe 2a homöomorph. Wir erhalten also

$$H_i((X/A) \setminus (A/A), (U/A) \setminus (A/A)) \cong H_i(X \setminus A, U \setminus A).$$

Erneute Anwendung des Ausschneidungssatzes (A ist abgeschlossen und U ist offen) liefert schließlich

$$H_i(X \setminus A, U \setminus A) \cong H_i(X, A).$$

Aufgabe 4: Das Zopflemma

Es sei das folgende kommutative Diagramm aus abelschen Gruppen und Homomorphismen gegeben:

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet & \\
\cdots & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \bullet &
\end{tikzcd}
$$

Dies ist ein aus vier Sequenzen geflochtener Zopf. Drei dieser Sequenzen seien exakt. In der vierten Sequenz sei jeweils die Komposition zweier 'nicht abbiegender' Homomorphismen gleich Null. Zeigen Sie, dass dann auch diese vierte Sequenz exakt ist.

Lösung zu Aufgabe 4:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, bend left, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & B \arrow[rr, bend left, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & C \arrow[rr, bend left, red, "\gamma_1"] \arrow[dr, "\gamma_2"'] & & D & \\
\cdots & & E \arrow[ur, "\epsilon_1"'] \arrow[dr, "\epsilon_2"] & & F \arrow[ur, red, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] & & L \arrow[ur, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] & & \cdots \\
 & M \arrow[ur, "\mu_1"] \arrow[rr, bend right, red, "\mu_2"'] & & N \arrow[ur, red, "\nu_1"] \arrow[rr, bend right, "\nu_2"'] & & O \arrow[ur, "\omega_1"] \arrow[rr, bend right, "\omega_2"'] & & P &
\end{tikzcd}
$$

Aus Gründen der Symmetrie genügt es, in obigem Diagramm die Exaktheit der rot markierten Sequenz an den Stellen N, F und C zu zeigen.

Exaktheit bei N:

$$\nu_1\mu_2 = \nu_1\epsilon_2\mu_1 = \beta_2\underbrace{\epsilon_1\mu_1}_{=0} = 0.$$

$$
\begin{aligned}
\nu_1(n) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_2\nu_1(n) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \nu_2(n) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \exists e \in E : \epsilon_2(e) = n \\
&\Longrightarrow \quad \beta_2\epsilon_1(e) = \nu_1\epsilon_2(e) = \nu_1(n) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \exists a \in A : \alpha_1(a) = \epsilon_1(e) \\
&\Longrightarrow \quad \epsilon_1(e - \alpha_2(a)) = \epsilon_1(e) - \alpha_1(a) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \exists m \in M : \mu_1(m) = e - \alpha_2(a) \\
&\Longrightarrow \quad \mu_2(m) = \epsilon_2\mu_1(m) = \epsilon_2(e - \alpha_2(a)) = \underbrace{\epsilon_2(e)}_{=n} - \underbrace{\epsilon_2\alpha_2}_{=0}(a) = n.
\end{aligned}
$$

Exaktheit bei F:

$$\phi_1\nu_1 = 0 \quad \text{nach Voraussetzung.}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1(f) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \gamma_2\phi_1(f) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \omega_1\phi_2(f) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \exists n \in N : \nu_2(n) = \phi_2(f) \\
&\Longrightarrow \quad \phi_2(f - \nu_1(n)) = \phi_2(f) - \nu_2(n) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \exists b \in B : \beta_2(b) = f - \nu_1(n) \\
&\Longrightarrow \quad \beta_1(b) = \phi_1\beta_2(b) = \phi_1(f) - \phi_1\nu_1(n) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \exists e \in E : \epsilon_1(e) = b \\
&\Longrightarrow \quad f = \beta_2(b) + \nu_1(n) = \beta_2\epsilon_1(e) + \nu_1(n) = \nu_1(\epsilon_2(e) + n) \in \mathrm{Bild}(\nu_1).
\end{aligned}
$$

Exaktheit bei C:

$$\gamma_1\phi_1 = \lambda_1\gamma_2\phi_1 = \underbrace{\lambda_1\omega_1}_{=0}\phi_2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1(c) = 0 \quad &\implies \quad \lambda_1\gamma_2(c) = 0 \\
&\implies \quad \exists o \in O : \omega_1(o) = \gamma_2(c) \\
&\implies \quad \omega_2(o) = \lambda_2\omega_1(o) = \underbrace{\lambda_2\gamma_2}_{=0}(c) \\
&\implies \quad \exists f \in F : \phi_2(f) = o \\
&\implies \quad \gamma_2(c - \phi_1(f)) = \gamma_2(c) - \omega_1\phi_2(f) = 0 \\
&\implies \quad \exists b \in B : \beta_1(b) = c - \phi_1(f) \\
&\implies \quad c = \beta_1(b) + \phi_1(f) = \phi_1(\beta_2(b) + f) \in \mathrm{Bild}(\phi_1).
\end{aligned}$$