Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Algebraische Topologie
Sommersemester 2011

Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Homologie relativ zum Rand

Wir betrachten den Zylinder $\Sigma = S^1 \times I$ mit seinen Randkomponenten

$$A_0 := S^1 \times \{0\} \quad \text{und} \quad A_1 := S^1 \times \{1\}.$$

Bestimmen Sie die relativen Homologiegruppen der Raumpaare $(\Sigma, \emptyset)$, (Σ, A_0) und $(\Sigma, A_0 \cup A_1)$.

Aufgabe 2: Quotienten

Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir führen auf X eine Äquivalenzrelation $R \subset X \times X$ ein durch

$$(x, y) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad (x = y) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ y \in A).$$

Die Menge der Restklassen wird durch die Quotiententopologie zu einem topologischen Raum, den wir mit X/A bezeichnen. Beweisen Sie:

a) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so induziert die Projektion $X \to X/A$ einen Homöomorphismus

$$X \setminus A \ \approx \ (X/A) \setminus (A/A).$$

b) Ist A Deformationsretrakt einer offenen Menge $U \subset X$, so ist $U/A \subset X/A$ eine offene zusammenziehbare Umgebung von $A/A \in X/A$.

Aufgabe 3: Relative Homologie und Quotienten

Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene und nicht-leere Teilmenge, die Deformationsretrakt einer offenen Menge $U \subset X$ ist. Ein solches Paar (X, A) nennt man *gut*. Zeigen Sie, dass dann für alle i gilt:

$$H_i(X, A) \cong \widetilde{H}_i(X/A)$$

Aufgabe 4: Das Zopflemma

Es sei das folgende kommutative Diagramm aus abelschen Gruppen und Homomorphismen gegeben:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \bullet & \\
\cdots & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & \bullet \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & \bullet \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & \bullet \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & \bullet \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & \bullet \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & \bullet &
\end{tikzcd}$$

Dies ist ein aus vier Sequenzen geflochtener Zopf. Drei dieser Sequenzen seien exakt. In der vierten Sequenz sei jeweils die Komposition zweier 'nicht abbiegender' Homomorphismen gleich Null. Zeigen Sie, dass dann auch diese vierte Sequenz exakt ist.

Beispiel: Ein solches Diagramm taucht auf, wenn man für Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow C_n(Y, Z) \xrightarrow{\ i\ } C_n(X, Z) \xrightarrow{\ j\ } C_n(X, Y) \longrightarrow 0$$

betrachtet und daraus analog zur Homologiesequenz von Paaren eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H_n(Y, Z) \xrightarrow{\ i_*\ } H_n(X, Z) \xrightarrow{\ j_*\ } H_n(X, Y) \xrightarrow{\ \partial_*\ } H_{n-1}(Y, Z) \longrightarrow \ldots$$

konstruiert. Diese Sequenz lässt sich mit den Homologiesequenzen der Paare (Y, Z), (X, Z) und (X, Y) zu einem solchen Zopf verflechten.

Informationen: Am 23. Juni (Fronleichnam) findet keine Übung statt. Die Aufgaben werden an einem Ersatztermin besprochen. Der Termin dafür wird in der Übung am 16. Juni abgestimmt und auf der Webseite zu den Übungen bekannt gegeben.

Achtung: Für die Aufgaben 1 und 3 benötigen Sie den Ausschneidungssatz und die Homologie von Sphären. Dieser Stoff wird am Montag den 20. Juni in der Vorlesung behandelt.