



## Übungsblatt 6

### Aufgabe 1: Die Homologiesequenz eines Raumpaars

Zeigen Sie, dass die Homologiesequenz

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{i+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_i(A) \xrightarrow{i_*} H_i(X) \xrightarrow{j_*} H_i(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

eines Raumpaars  $(X, A)$  an den Stellen  $H_i(A)$  exakt ist.

### Aufgabe 2: Relative Homologiegruppen

Es sei  $(X, A)$  ein Raupaar. Welche Beziehungen gelten zwischen den Homologiegruppen  $H_i(X)$ ,  $H_i(A)$  und  $H_i(X, A)$  in den folgenden Situationen:

- $A = \emptyset$
- $A \neq \emptyset$  ist zusammenziehbar
- $X$  ist zusammenziehbar

### Aufgabe 3: Das Spalten von exakten Sequenzen

Eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  spaltet, wenn es einen Isomorphismus

$$\phi : A \oplus C \rightarrow B$$

gibt, mit  $f(a) = \phi(a, 0)$  und  $g(\phi(a, c)) = c$  für alle  $a \in A$ ,  $c \in C$ . Beweisen Sie, dass dies genau dann der Fall ist, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- Es gibt einen Homomorphismus  $r : C \rightarrow B$  mit  $g \circ r = \text{id}_C$ .
- Es gibt einen Homomorphismus  $\ell : B \rightarrow A$  mit  $\ell \circ f = \text{id}_A$ .

### Aufgabe 4: Rechnen mit exakten Sequenzen

Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe und die gegebene Sequenz von Gruppen und Homomorphismen sei exakt. Entscheiden Sie, ob  $G$  damit schon eindeutig bestimmt ist.

- $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

---

**Informationen:** Die Aufgaben werden in der Übung am 16. Juni besprochen.