Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Algebraische Topologie

Sommersemester 2011

PROF. DR. JOSEF DORFMEISTER — DR. JAN WEHRHEIM

Übungsblatt 5 - Musterlösung

Aufgabe 1: Ränder zeichnen

Wir betrachten den 2-Quader $T = \mathrm{id} : I^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\partial_2(T)$ und stellen Sie das Ergebnis zeichnerisch dar. Berechnen Sie explizit $\partial_1(\partial_2(T))$ und erklären Sie das Ergebnis anhand der Zeichnung.

Lösung zu Aufgabe 1:

Im Rand $\partial_2(T)$ von T tauchen die folgenden 1-Quader auf:

$$\alpha := A_1T : I \to \mathbb{R}^2; x \mapsto T(0,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \qquad \beta := A_2T : I \to \mathbb{R}^2; x \mapsto T(x,0) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma := B_1T : I \to \mathbb{R}^2; x \mapsto T(1,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \delta := B_2T : I \to \mathbb{R}^2; x \mapsto T(x,1) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $\partial_2(T) = \sum_{j=1}^{2}(-1)^j(A_jT - B_jT) = -A_1T + B_1T + A_2T - B_2T = -\alpha + \gamma + \beta - \delta$.
Wir führen die Bezeichnung

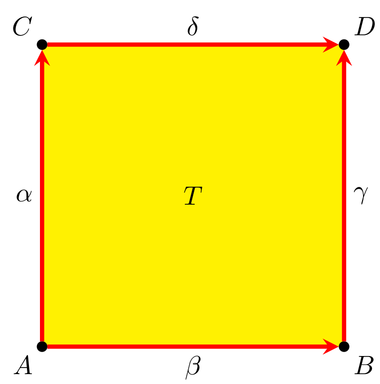
$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein. Damit tauchen im Rand der 1-Quader $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die folgenden 0-Quader auf:

$$A_1\alpha = \alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \quad \text{und} \quad B_1\alpha = \alpha(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C$$
$$A_1\beta = \beta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \quad \text{und} \quad B_1\beta = \beta(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$$
$$A_1\gamma = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \quad \text{und} \quad B_1\gamma = \gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = D$$
$$A_1\delta = \delta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C \quad \text{und} \quad B_1\delta = \delta(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = D$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1(\partial_2(T)) &= \partial_1(-\alpha + \gamma + \beta - \delta) \\
&= -\partial_1(\alpha) + \partial_1(\gamma) + \partial_1(\beta) - \partial_1(\delta) \\
&= -(-A_1\alpha + B_1\alpha) + (-A_1\gamma + B_1\gamma) + (-A_1\beta + B_1\beta) - (-A_1\delta + B_1\delta) \\
&= A - C - B + D - A + B + C - D \\
&= 0.
\end{aligned}$$



Aufgabe 2: Die Augmentierung

Es sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Wir definieren die *Augmentierung*

$$\epsilon : Q_0(X) \to \mathbb{Z}\ ;\ \sum_{m \in I} a(m)x_m \mapsto \sum_{m \in I} a(m),$$

wobei I eine endliche Indexmenge ist. Beweisen Sie:

a) Die Augmentierung ϵ ist ein surjektiver Homomorphismus und induziert einen surjektiven Homomorphismus $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$.

b) Es gilt $\epsilon \circ \partial_1 = 0$ und somit $B_0(X) \subset \ker \epsilon$.

c) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $\ker \epsilon = B_0(X)$. In diesem Fall induziert ϵ also einen Isomorphismus

$$\epsilon_* : H_0(X) \overset{\cong}{\to} \mathbb{Z}.$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Die Gruppe $Q_(X)$ ist die von den Punkten $x \in X$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Sind

$$a = \sum_{m \in I_a} a(m)x_m \quad \text{und} \quad b = \sum_{m \in I_b} b(m)x_m$$

zwei Elemente von $Q_0(X)$, so gilt

$$a + b = \sum_{m \in I_a \cup I_b} (a(m) + b(m))x_m,$$

wobei $a(m) = 0$ für $m \in I_b \setminus I_a$ und $b(m) = 0$ für alle $m \in I_a \setminus I_b$ gesetzt wird. Damit ist ϵ offensichtlich ein Homomorphismus.

Wegen $X \neq \emptyset$ existiert ein $x \in X$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $a_n := nx \in Q_0(X)$ ein Element mit $\epsilon(a_n) = n$. Somit ist ϵ surjektiv.

Und da es schließlich keine degenerierten 0-Quader gibt ist $C_0(X) = Q_0(X)$ und wir erhalten so einen surjektiven Homomorphismus $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$:

b) Es genügt zu zeigen, dass $\epsilon(\partial_1(T)) = 0$ für alle 1-Quader $T : I \to X$: Ist $T(0) = x_0$ und $T(1) = x_1$, so gilt

$$\epsilon(\partial_1(T)) = \epsilon(-A_1T + B_1T) = \epsilon((-1)x_0 + 1x_1) = (-1) + 1 = 0.$$

Folglich gilt für jedes Element $b \in B_0(X) = \partial_1(C_1(X))$ sofort $\epsilon(b) = 0$, also ist $B_0(X) \subset \ker \epsilon$.

c) Es sei $a \in \ker \epsilon$. Wir konstruieren eine 1-Kette $c \in C_1(X)$ mit $\partial_1(c) = a$ und zeigen so, dass $a \in B_0(X)$, also $\ker \epsilon \subset B_0(X)$, also $\ker \epsilon = B_0(X)$ gilt.

Wir schreiben

$$a = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=1}^{\ell} q_i y_i$$

mit Punkten $x_i, y_i \in X$ und positiven ganzen Zahlen p_i, q_i. Wegen $\epsilon(a) = 0$ gilt

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{\ell} q_i =: N.$$

Wir nehmen nun das N-Tupel von Punkten $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N)$ welches jeden Punkt x_i genau p_i-fach enthält und das entsprechende N-Tupel $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_N)$ welches jeden Punkt y_i genau q_i-fach enthält. Wir definieren für $i = 1, \ldots, N$ die 1-Quader $T_i : I \to X$, indem wir einen nicht-konstanten Weg von $\tilde{y}_i$ nach $\tilde{x}_1$ wählen. Hier nutzen wir aus, dass X wegzusammenhängend ist. Es gilt also $\partial_1(T_i) = -\tilde{y}_i + \tilde{x}_i$. Schließlich setzen wir $c := \sum_{i=1}^{N} T_i \in C_1(X)$ und erhalten:

$$\partial_1(c) = \sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i - \tilde{y}_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=1}^{\ell} q_i y_i = a.$$

Da $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ ein surjektiver Homomorphismus ist, ist die induzierte Abbildung

$$\epsilon_* : C_0(X)/\ker \epsilon = C_0(X)/B_0(X) = H_0(X) \to \mathbb{Z}$$

also ein Isomorphismus.

Aufgabe 3: Reduzierte Homologie

Es seien $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und ϵ die Augmentierung wie in Aufgabe 3. Wir definieren die 0-*dimensionale reduzierte Homologie Gruppe*

$$\widetilde{H}_0(X) := \ker \epsilon / B_0(X).$$

Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \xrightarrow{\xi_*} H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

exakt ist. Hierbei ist ξ_* der von der Inklusion $\xi : \ker \epsilon \to C_0(X)$ induzierte Homomorphismus.

Lösung zu Aufgabe 3:

Es sind die folgenden Dinge zu beweisen: ξ_* ist injektiv, ϵ_* ist surjektiv und $\ker \epsilon_* = \operatorname{im} \xi_*$.

Sei $a \in \ker \epsilon$ mit $\xi_*[a] = 0 \in H_0(X)$. Es gilt also $\xi(a) \in B_0(X)$, aber ξ ist lediglich die Inklusionsabbildung der Teilmenge $\ker \epsilon$ nach $C_0(X)$, also gilt tatsächlich $a \in B_0(X)$. Damit ist aber $[a] = 0 \in \widetilde{H}_0(X) = \ker \epsilon / B_0(X)$ und ξ_* somit injektiv.

Die Surjektivität von $\epsilon_* : H_0(X) \to \mathbb{Z}$ folgt sofort aus der Surjektivität von $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$, die wir in Aufgabe 2 bewiesen haben.

Schließlich gilt für ein $a \in Z_0(X) = C_0(X)$ und das dargestellt Element $[a] \in H_0(X)$ die folgende Äquivalenz:

$$[a] \in \ker \epsilon_* \iff \epsilon_*[a] = 0 \iff \epsilon(a) = 0 \iff a \in \ker \epsilon \iff a \in \operatorname{im} \xi \iff [a] \in \operatorname{im} \xi_*$$

Aufgabe 4: Das Fünferlemma

Das folgende Diagramm von Gruppen und Homomorphismen sei kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5
\end{array}$$

Ferner seien beide Zeilen exakt, f_2 und f_4 seien Isomorphismen, f_1 sei surjektiv und f_5 sei injektiv. Beweisen Sie, dass dann f_3 ein Isomorphismus ist!

Lösung zu Aufgabe 4:

Es ist zu zeigen, dass f_3 surjektiv und injektiv ist.

$$\begin{aligned}
a_3 \in \ker(f_3) \quad & \Rightarrow \quad \psi_3 \circ f_3(a_3) = 0 \\
& \Rightarrow \quad f_4 \circ \phi_3(a_3) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \phi_3(a_3) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \exists a_2 \in A_2 : \phi_2(a_2) = a_3 \\
& \Rightarrow \quad f_3 \circ \phi_2(a_2) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \psi_2 \circ f_2(a_2) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \exists b_1 \in B_1 : \psi_1(b_1) = f_2(a_2) \\
& \Rightarrow \quad \exists a_1 \in A_1 : f_1(a_1) = b_1 \\
& \Rightarrow \quad \phi_1(a_1) = a_2 \\
& \Rightarrow \quad a_3 = \phi_2 \circ \phi_1(a_1) \\
& \Rightarrow \quad a_3 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 \in B_3 \quad & \Rightarrow \quad b_4 := \psi_3(b_3) \in B_4 \\
& \Rightarrow \quad a_4 := f_4^{-1}(b_4) \in A_4 \\
& \Rightarrow \quad \psi_4 \circ f_4(a_4) = 0 \\
& \Rightarrow \quad f_5 \circ \phi_4(a_4) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \phi_4(a_4) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \exists a_3 \in A_3 : \phi_3(a_3) = a_4 \\
& \Rightarrow \quad f_4 \circ \phi_3(a_3) = b_4 \\
& \Rightarrow \quad \psi_3 \circ f_3(a_3) = b_4 \\
& \Rightarrow \quad \psi_3(b_3 - f_3(a_3)) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \exists b_2 \in B_2 : \psi_2(b_2) = b_3 - f_3(a_3) \\
& \Rightarrow \quad a_2 := f_2^{-1}(b_2) \\
& \Rightarrow \quad f_3 \circ \phi_2(a_2) = b_3 - f_3(a_3) \\
& \Rightarrow \quad b_3 = f_3(\phi_2(a_2) + a_3).
\end{aligned}$$