Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Ränder zeichnen

Wir betrachten den 2-Quader $T = \mathrm{id} : I^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\partial_2(T)$ und stellen Sie das Ergebnis zeichnerisch dar. Berechnen Sie explizit $\partial_1(\partial_2(T))$ und erklären Sie das Ergebnis anhand der Zeichnung.

Aufgabe 2: Die Augmentierung

Es sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Wir definieren die *Augmentierung*

$$\epsilon : Q_0(X) \to \mathbb{Z}\,;\ \sum_{m\in I} a(m)x_m \mapsto \sum_{m\in I} a(m),$$

wobei I eine endliche Indexmenge ist. Beweisen Sie:

a) Die Augmentierung ϵ ist ein surjektiver Homomorphismus und induziert einen surjektiven Homomorphismus $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$.

b) Es gilt $\epsilon \circ \partial_1 = 0$ und somit $B_0(X) \subset \ker \epsilon$.

c) Ist X wegzusammenhängend, so gilt $\ker \epsilon = B_0(X)$. In diesem Fall induziert ϵ also einen Isomorphismus
$$\epsilon_* : H_0(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3: Reduzierte Homologie

Es seien $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und ϵ die Augmentierung wie in Aufgabe 3. Wir definieren die 0-*dimensionale reduzierte Homologie Gruppe*

$$\widetilde{H}_0(X) := \ker \epsilon / B_0(X).$$

Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \xrightarrow{\xi_*} H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

exakt ist. Hierbei ist ξ_* der von der Inklusion $\xi : \ker \epsilon \to C_0(X)$ induzierte Homomorphismus.

Aufgabe 4: Das Fünferlemma

Das folgende Diagramm von Gruppen und Homomorphismen sei kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\phi_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"] & B_4 \arrow[r, "\psi_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Ferner seien beide Zeilen exakt, f_2 und f_4 seien Isomorphismen, f_1 sei surjektiv und f_5 sei injektiv. Beweisen Sie, dass dann f_3 ein Isomorphismus ist!

Informationen: Die Aufgaben werden in der Übung am 9. Juni besprochen.