Algebraische Topologie
Sommersemester 2011

Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 4 - Musterlösung

Aufgabe 1: Überlagerungen aus lokalen Homöomorphismen

Es seien X und Y wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorff Räume. Ferner sei X kompakt und $f : X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus. Beweisen Sie, dass (X, f) damit schon eine Überlagerung ist.

Lösung zu Aufgabe 1:

Zunächst stellen wir fest, dass f surjektiv ist: Als lokaler Homöomorphismus ist f offen, also ist $f(X) \subset Y$ offen. Da X kompakt und f stetig ist, ist $f(X) \subset Y$ kompakt. Und da Y Hausdorff ist folgt aus kompakt schon abgeschlossen. Für $X \neq \emptyset$ ist auch $f(X) \neq \emptyset$, also ist $f(X) \subset Y$ eine nicht leere offene und abgeschlossene Teilmenge. Da Y wegzusammenhängend ist, ist Y auch zusammenhängend und es folgt somit $f(X) = Y$.

Damit ist für jedes $y \in Y$ die Menge $f^{-1}(y) \subset X$ nicht leer. Wir zeigen als nächstes, dass $f^{-1}(y) \subset X$ für jedes $y \in Y$ endlich ist: Ist die Menge $f^{-1}(y)$ unendlich, so existiert aufgrund der Kompaktheit von X ein Häufungspunkt x dieser Menge. Jede Umgebung U von x enthält also unendlich viele Urbilder von y. Die Funktion f kann also auf keiner Umgebung von x injektiv sein. Also kann f kein lokaler Homöomorphismus sein. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

Zu den Urbildern $x_1, \ldots, x_n \in X$ eines fest gewählten $y \in Y$ wählen wir nun offene und wegzusammenhängende Umgebungen $U_1, \ldots, U_n \subset X$, so dass $f|_{U_i}$ jeweils ein Homöomorphismus ist. Da X Hausdorff ist, können diese U_i disjunkt gewählt werden. Dann ist

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} f(U_i)$$

eine Elementarumgebung von y: Als endlicher Schnitt offener Mengen ist V offen und die Wegzusammenhangskomponenten von $f^{-1}(V)$ sind offene Teilmengen der U_i.

Aufgabe 2: SU(2) → SO(3) **- das Ende**

Zeigen Sie, dass der auf Übungsblatt 3 konstruierte Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ tatsächlich eine Überlagerung ist.

Lösung zu Aufgabe 2:

Nach Aufgabe 1 auf diesem Blatt genügt es zu zeigen, dass ϕ ein lokaler Homöomorphismus ist.

Ferner genügt es, den Punkt $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2} \in \mathrm{SU}(2)$ zu betrachten und eine Umgebung U davon anzugeben, so dass $\phi|_U : U \to \phi(U)$ ein Homöomorphismus ist: Ist $A_0 \in \mathrm{SU}(2)$ dann ein anderer Punkt, so betrachten wir die Homöomorphismen

$$\lambda_{{A_0}^{-1}} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)\ ;\ A \mapsto {A_0}^{-1} \cdot A$$

und

$$\lambda_{\phi(A_0)} : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)\ ;\ \varphi \mapsto \phi(A_0) \circ \varphi.$$

Es gilt dann

$$\phi = \lambda_{\phi(A_0)} \circ \phi \circ \lambda_{{A_0}^{-1}}$$

und damit ist $U_0 := A_0 \cdot U \subset \mathrm{SU}(2)$ eine Umgebung von A_0, die von ϕ homöomorph auf ihr Bild abgebildet wird.

Wir verwenden nun, dass die Exponentialabbildungen

$$\exp : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{SU}(2) \quad \text{und} \quad \exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$$

jeweils in der Identität lokale Homöomorphismen sind. Unser ϕ induziert dann eine Abbildung von einer Umgebung der Null in $\mathfrak{su}(2)$ in eine Umgebung der Null in $\mathfrak{so}(3)$ und es bleibt noch zu zeigen, dass die linearisierte Abbildung $f : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ surjektiv ist. Dies geschieht, indem man explizite Urbilder einer Basis von $\mathfrak{so}(3)$ angibt.

Dafür ist es hilfreich, eine explizite Formel für ϕ zu haben. Wir schreiben ein $A \in \mathrm{SU}(2)$ als

$$A = \cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\alpha) \cdot \left(v_1 \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)$$

mit einem Winkel α und einem Einheitsvektor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Die Drehung $\phi(A)$ ist dann die Drehung um den Winkel 2α mit der Drehachse v. Dies kann man explizit schreiben als

$$\phi(A) = \exp \left(2\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 3: Pullback von Überlagerungen

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung zwischen wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen. Wir setzen

$$\widetilde{Y} := f^*\widetilde{X} := \{(y, \tilde{x}) \in Y \times \widetilde{X} \mid f(y) = p(\tilde{x})\} \quad \text{und} \quad q : \widetilde{Y} \to Y \ ; \ (y, \tilde{x}) \mapsto y.$$

Zeigen Sie, dass $q : \widetilde{Y} \to Y$ wieder eine Überlagerung ist.

Betrachten Sie die Retraktion $f : S^1 \cup [1, 2] \to S^1$, welche die Identität auf S^1 ist und das Intervall $[1, 2]$ auf den Punkt $1 \in S^1$ abbildet. Bestimmen Sie f^* von allen Überlagerungen der S^1 und vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 1 von Blatt 2

Lösung zu Aufgabe 3:

Der Raum $\widetilde{Y}$ erhält die Teilraumtopologie des Produktraumes $Y \times \widetilde{X}$. Da die Projektion $Y \times \widetilde{X} \to Y$ stetig ist, ist somit die Abbildung q als Einschränkung dieser Projektion auf den Teilraum $\widetilde{Y}$ ebenfalls stetig.

Wir fixieren einen Punkt $y_0 \in Y$ und konstruieren eine Elementarumgebung. Dazu sei $x_0 := f(y_0)$. Die Faser $q^{-1}(y_0)$ besteht dann genau aus den Punktpaaren $(y_0, \tilde{x})$ mit $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Sei ferner $U \subset X$ eine Elementarumgebung von x_0 und $V := f^{-1}(U)$. Da f stetig ist, ist V eine offene und wegzusammenhängende Umgebung von y_0. Es gilt

$$q^{-1}(V) = \{(y, \tilde{x}) \in Y \times \widetilde{X} \mid f(y) \in U \text{ und } f(y) = p(\tilde{x})\}.$$

Es sei $W \subset q^{-1}(V)$ die Wegzusammenhangskomponente von $(y_0, \tilde{x})$ für ein gewisses $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Wir wollen zeigen, dass $q : W \to V$ ein Homöomorphismus ist. Dazu sei $Z \subset p^{-1}(U)$ die Wegzusammenhangskomponente von $\tilde{x}$ in $\widetilde{X}$ und $\phi := p|_Z{}^{-1} : U \to Z$ der entsprechende Homöomorphismus. Die Umkehrabbildung zu $q : W \to V$ ist dann gegeben durch $q^{-1}(y) = (y, \phi(f(y)))$ und diese ist ebenfalls stetig.

Tatsächlich kann man alle Überlagerungen von $X = \bigcirc\!\!-$ als Pullback von Überlagerungen der S^1 unter der angegebenen Retraktion beschreiben.

Aufgabe 4: Höhere Homotopie-Gruppen

Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit $p(\tilde{x}) = x$, so sind die induzierten Abbildungen
$$p_* : \pi_n(\widetilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_n(X, x)$$
für alle $n \geq 2$ Isomorphismen. Berechnen Sie damit sämtliche Homotopie-Gruppen der S^1.

Lösung zu Aufgabe 4:

Per Konstruktion sind die induzierten Abbildungen p_* Homomorphismen. Es ist nur noch zu zeigen, dass es für $n \geq 2$ auch Bijektionen sind: Sei dazu $a \in \pi_n(X, x)$ eine von einer stetigen Abbildung $\alpha : S^n \to X$ repräsentierte Klasse. Da S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist, existiert dann ein Lift $\tilde{\alpha} : S^n \to \widetilde{X}$ mit $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Die von $\tilde{\alpha}$ repräsentierte Klasse $\tilde{a} \in \pi_n(\widetilde{X}, \tilde{x})$ erfüllt damit $p_*(\tilde{a}) = a$.

Es sei nun $\tilde{a} \in \pi_n(\widetilde{X}, \tilde{x})$ eine von $\tilde{\alpha} : S^n \to \widetilde{X}$ repräsentierte Klasse mit $p_*(a) = 0 \in \pi_n(X, x)$. Die Abbildung $\alpha := p \circ \tilde{\alpha} : S^n \to X$ ist also homotop zur konstanten Abbildung auf den Basispunkt $x \in X$. Die entsprechende Homotopie ist eine stetige Abbildung

$$\phi : S^n \times [0,1] \to X \quad \text{mit} \quad \phi(z, 0) = \alpha(z) \quad \text{und} \quad \phi(z, 1) = x$$

für alle $z \in S^n$. Da die S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist, ist auch $S^n \times [0,1]$ für $n \geq 2$ einfach zusammenängend und damit existiert ein eindeutiger Lift dieser Homotopie durch den Punkt $(\tilde{x}, 0)$ und damit ist tatsächlich schon $\tilde{\alpha}$ homotop zur konstanten Abbildung $\tilde{x} \in \widetilde{X}$.

Die Abbildungen p_* sind für $n \geq 2$ also injektiv und surjektiv und somit bijektiv. Für $n = 1$ ist die Abbildung p_* zwischen den Fundamentalgruppen von $\widetilde{X}$ und X auch stets injektiv, aber nur genau dann surjektiv, wenn p ein Homöomorphismus ist.

Die Homotopie-Gruppen $\pi_n(S^1, 1)$ für $n \geq 2$ sind somit alle isomorph zu den Homotopie-Gruppen der universellen Überlagerung $\pi_n(\mathbb{R}, 0)$, und diese sind alle isomorph zu $\{0\}$, da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist.