



Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Überlagerungen aus lokalen Homöomorphismen

Es seien X und Y wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorff Räume. Ferner sei X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ ein lokaler Homöomorphismus. Beweisen Sie, dass (X, f) damit schon eine Überlagerung ist.

Aufgabe 2: $SU(2) \rightarrow SO(3)$ - das Ende

Zeigen Sie, dass der auf Übungsblatt 3 konstruierte Gruppenhomomorphismus $\phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ tatsächlich eine Überlagerung ist.

Aufgabe 3: Pullback von Überlagerungen

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung zwischen wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen. Wir setzen

$$\tilde{Y} := f^* \tilde{X} := \{(y, \tilde{x}) \in Y \times \tilde{X} \mid f(y) = p(\tilde{x})\} \quad \text{und} \quad q : \tilde{Y} \rightarrow Y ; (y, \tilde{x}) \mapsto y.$$

Zeigen Sie, dass $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ wieder eine Überlagerung ist.

Betrachten Sie die Retraktion $f : S^1 \cup [1, 2] \rightarrow S^1$, welche die Identität auf S^1 ist und das Intervall $[1, 2]$ auf den Punkt $1 \in S^1$ abbildet. Bestimmen Sie f^* von allen Überlagerungen der S^1 und vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 1 von Blatt 2

Aufgabe 4: Höhere Homotopie-Gruppen

Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung mit $p(\tilde{x}) = x$, so sind die induzierten Abbildungen

$$p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_n(X, x)$$

für alle $n \geq 2$ Isomorphismen. Berechnen Sie damit sämtliche Homotopie-Gruppen der S^1 .

Informationen: Wegen des Feiertages am 2. Juni wird dieses Übungsblatt nicht besprochen, die Aufgaben sind lediglich Anregungen zum Selbststudium. Insbesondere die Aufgaben 2 und 4 gehen über den Rahmen der Vorlesung hinaus.

Wir bieten eine zusätzliche Übungsstunde an, um *grundlegende* Fragen aus dem Kapitel 'Überlagerungen' der Vorlesung zu klären. Der Termin dazu wird am 26. Mai in der Übung abgestimmt.

Aufgabe zur Vorbereitung der Fragestunde: Überlegen Sie sich eine Aufgabe zum Thema 'Überlagerungen', die Ihrer Meinung nach so oder so ähnlich in der Klausur erscheinen könnte.