Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Algebraische Topologie

Sommersemester 2011

Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 3 - Musterlösung

Aufgabe 1: Überlagerungen von $\bigcirc\!\!\bigcirc$

Wir betrachten den topologischen Raum $X := \bigcirc\!\!\bigcirc \subset \mathbb{R}^2$. Die Fundamentalgruppe von X ist das freie Produkt $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

a) Finden Sie eine Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ mit $\widetilde{X} = \dots \underline{\bigcirc \; \bigcirc \; \bigcirc} \dots \subset \mathbb{R}^2$. Dies ist die x-Achse vereinigt mit den Kreisen C_k für $k \in \mathbb{Z}$, mit Mittelpunkten bei $(k, \frac{1}{4})$ und Radius $\frac{1}{4}$. Wir betrachten das Element $\alpha \in \pi_1(\widetilde{X}, (0,0))$, welches durch die folgende Schleife dargestellt wird: Sie startet bei $(0,0)$, läuft bis $(k,0)$ auf der x-Achse, umrundet C_k einmal und läuft auf der x-Achse zurück nach $(0,0)$. Berechnen Sie $p_*(\alpha)$.

b) Geben Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ eine n-blättrige Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ an.

c) Finden Sie eine Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ mit $\widetilde{X} = \dots \bigcirc\!\!\bigcirc\!\!\bigcirc\!\!\bigcirc\!\!\bigcirc \dots \subset \mathbb{R}^2$. Damit ist die Vereinigung von Kreisen C_k für $k \in \mathbb{Z}$ gemeint, mit Mittelpunkt bei $(k, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$.

d) Zeigen Sie, dass X eine universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ besitzt.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Wir schreiben $X = A \cup B$ mit $A, B \approx S^1$, wobei der Schnitt $A \cap B$ aus genau einem Punkt $x_0 \in X$ besteht. Wir definieren die Abbildung $p : \widetilde{X} \to X$, indem wir jeden der Kreise C_k homöomorph auf den Kreis B abbilden, wobei der Berührpunkt $(k,0)$ von C_k mit der x-Achse auf den Punkt x_0 abgebildet wird. Mit der x-Achse überlagern wir den Kreis A, so dass die Punkte $(k,0)$ für $k \in \mathbb{Z}$ alle auf den Punkt x_0 abgebildet werden.

Es sei a der Erzeuger von $\pi_1(A, x_0) \cong \mathbb{Z}$ und b der Erzeuger von $\pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ besteht also aus Worten in a und b. Der Weg von $(0,0)$ nach $(k,0)$ in $\widetilde{X}$ repräsentiert unter p das Element $a^k \in \pi_1(X, x_0)$. Die einmalige Umrundung von C_k wird unter p zum Repräsentanten des Elements $b \in \pi_1(X, x_0)$. Der Weg zurück von $(k,0)$ nach $(0,0)$ gibt das Element $a^{-k} \in \pi_1(X, x_0)$. Wir erhalten insgesamt $p_*(\alpha) = a^{-k}ba^k$.

b) Es sei $\widetilde{X}$ eine 'Blume mit n Blütenblättern', also eine $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ an welche in jeder n-ten Einheitswurzel eine weitere (hinreichend kleine) S^1 angeheftet wurde. Die Abbildung $p : \widetilde{X} \to X$ wickelt die innere S^1 dann n-fach um den Kreis $A \subset X$ während die Blütenblätter jeweils homöomorph auf den Kreis $B \subset X$ abgebildet werden.

c) Wir definieren die Abbildung $p : \widetilde{X} \to X$, indem wir alle Kreise C_k mit geradem k zweifach um den Kreis $A \subset X$ wickeln und die Kreise C_k mit ungeradem k zweifach um den Kreis $B \subset X$ wickeln.

d) Der Raum X ist lokal einfach zusammenhängend, da man zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung finden kann, die auf x zusammenziehbar ist. Also besitzt X eine universelle Überlagerung.

Aufgabe 2: $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

Konstruieren Sie einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ mit $\phi(A) = \phi(-A)$ für alle $A \in \mathrm{SU}(2)$.

Anleitung: Zeigen Sie der Reihe nach

a) Die Menge $\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid X^* = -X \text{ und } \mathrm{tr}(X) = 0\}$ ist ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum.

b) Durch $\langle X, Y\rangle := -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY)$ ist ein euklidisches Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$ definiert.

c) Die Gruppe

$$G := \{g : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2) \mid g \text{ ist linear und } \langle g(X), g(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{su}(2)\}$$

ist isomorph zu $\mathrm{O}(3)$ und mit der Normtopologie sogar homöomorph.

d) Ist $A \in \mathrm{SU}(2)$, so ist $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)\ ;\ X \mapsto AXA^{-1}$ ein Element in G.

e) Die Abbildung $\phi(A) := \mathrm{Ad}_A \in G$ definiert unter dem Isomorphismus $G \cong \mathrm{O}(3)$ einen Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, welcher die geforderten Eigenschaften erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Die definierenden Eigenschaften von $\mathfrak{su}(2)$ sind linear in X, also ist $\mathfrak{su}(2) \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ ein Untervektorraum. Eine $\mathbb{R}$-Basis ist gegeben durch

$$E_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Allgemein stellt $\mathrm{tr}(X^*Y)$ ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ dar. Die Basisvektoren von oben sind diesbezüglich orthonormal. Auf $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2, E_3)$ liefert diese Formel also ein reelles Skalarprodukt.

c) Wir wählen eine Orthonormalbasis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ und erhalten durch $\psi(e_i) := E_i$ eine Isometrie zwischen euklidischen Vektorräumen $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2)$. Diese induziert einen Isomorphismus $\psi^* : G \to \mathrm{O}(3)$ durch $\psi^*(g)(v) := g(\psi(v))$.

Durch das obige Skalarprodukt wird $\mathfrak{su}(2)$ ein normierter Vektorraum. Die linearen Abbildungen $g : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ werden durch $\|g\| := \sup_{\|X\|=1}\{\|g(X)\|\}$ ein normierter Vektorraum. Die Gruppe G erhält die Teilraumtopologie aus dem Raum aller linearen Abbildungen auf $\mathfrak{su}(2)$. Offensichtlich ist ψ^* ein Homöomorphismus, wenn man auf $\mathrm{O}(3)$ ebenfalls diese Normtopologie verwendet. Die von uns verwendete Teilraumtopologie auf $\mathrm{O}(3) \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^9$ ist äquivalent dazu.

d) Wegen $A \in \mathrm{SU}(2)$ landet $\mathrm{Ad}_A(X)$ tatsächlich wieder in $\mathfrak{su}(2)$ und es gilt

$$\langle \mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AXA^{-1}AYA^{-1}) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AXYA^{-1}) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY) = \langle X, Y\rangle.$$

e) Die Gruppe $\mathrm{SU}^2 \approx S^3$ ist zusammenhängend, also ist das Bild unter der stetigen Abbildung ϕ zusammenhängend und wegen $\phi(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ liegt das Bild in der Wegzusammenhangskomponente der Identität $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{O}(3)$.

Aufgabe 3: Reguläre Überlagerungen

Zeigen Sie, dass eine Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ genau dann regulär ist, wenn die Automorphismengruppe $A(\widetilde{X}, p)$ transitiv auf $p^{-1}(x)$, $x \in X$ operiert.

Lösung zu Aufgabe 3:

Per Definition ist eine Überlagerung genau dann regulär, wenn $H := p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0) =: G$ ein Normalteiler ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Konjugationsklasse von H in G nur aus H selber besteht ($gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$). Die Konjugationsklasse von H besteht aber genau aus den Gruppen $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}))$ mit $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Eine Überlagerung ist also genau dann regulär, wenn das Bild $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}))$ für alle $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ identisch ist, also genau dann, wenn es zu je zwei Punkten $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ einen Automorphismus $\phi \in A(\widetilde{X}, p)$ gibt mit $\phi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gruppe der Automorphismen transitiv auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ operiert und dies ist genau dann der Fall, wenn $A(\widetilde{X}, p)$ auf irgendeiner (und damit auf allen) Fasern transitiv operiert.

Aufgabe 4: Überlagerungen aus Gruppenwirkungen II

Es sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum und G eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X.

a) Zeigen Sie, dass die Überlagerung $p : X \to X/G$ regulär ist und die Automorphismengruppe von (X, p) genau G ist.

b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X/G falls X einfach zusammenhängend ist. Was kann man über die Fundamentalgruppe von X/G sagen, wenn X nicht einfach zusammenhängend ist?

c) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ für $n \geq 2$.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Es ist $G \subset A(X, p)$ und G operiert transitiv auf den Fasern von p, also ist $p : X \to X/G$ regulär. Es ist noch zu zeigen, dass jeder Automorphismus von (X, p) durch ein Element $g \in G$ gegeben ist. Es sei also $\phi : X \to X$ ein Homöomorphismus mit $p \circ \phi = p$. Zu einem Punkt $x_0 \in X$ betrachten wir die Menge $F = G.x_0$. Dies ist die Faser von p über dem Punkt $p(x) = [x] \in X/G$. Die Abbildung ϕ induziert eine Permutation von F. Es gibt also ein $g_0 \in G$ mit $g_0.x_0 = \phi(x_0)$. Damit ist ${g_0}^{-1} \circ \phi$ ein Automorphismus von (X, p) der mit x_0 einen Fixpunkt besitzt. Dies kann nur sein, wenn ${g_0}^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_X$, also $\phi = g_0 \in G$.

b) Wenn X einfach zusammenhängend ist, dann ist die Fundamentalgruppe von X/G isomorph zu G. Allgemein gilt

$$G \cong \pi_1(X/G, [x])/p_*(\pi_1(X, x))$$

für alle $x \in X$.

c) Wir erhalten $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx X/G$ mit $X = S^n$ und $G = \mathbb{Z}_2$. Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend und somit gilt $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$.