Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Algebraische Topologie

Sommersemester 2011

Prof. Dr. Josef Dorfmeister — Dr. Jan Wehrheim

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Überlagerungen von $\bigcirc\!\!-$

Wir betrachten den topologischen Raum $X := \bigcirc\!\!- := S^1 \cup [1,2] \subset \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.

b) Es sei $\widetilde{X} := -\!\!\bigcirc\!\!- \subset \mathbb{R}^2$. Definieren Sie eine zweiblättrige Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$. Bestimmen Sie $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ und das Bild der Abbildung $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

c) Geben Sie zu jeder Untergruppe $H \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $(\widetilde{X}, p)$ von X an, so dass gilt:

$$H = p_*\left(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\right).$$

Aufgabe 2: Matrixgruppen

Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ wird zu einem topologischen Raum, indem wir sie als Teilmenge des $\mathbb{C}^{n\times n}$ auffassen. Die Gruppen $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ erhalten eine Topologie, indem wir sie als Untergruppe in einem passenden $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ darstellen.

a) Zeigen Sie, dass die $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und damit auch die oben genannten Untergruppen so zu topologischen Gruppen werden (d.h. Multiplikation $\mu : G \times G \to G$ und Inversion $c : G \to G$ sind stetig).

b) Überzeugen Sie sich von den folgenden Homöomorphien:

$$\mathrm{SO}(2) \approx \mathrm{U}(1) \approx S^1 \quad , \quad \mathrm{SU}(2) \approx S^3 \quad , \quad \mathrm{SO}(3) \approx \mathbb{RP}^3 \quad , \quad \mathrm{O}(n) \approx \mathrm{SO}(n) \sqcup \mathrm{SO}(n)$$

c) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathrm{SO}(3)$ und zeigen Sie, dass die universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(3)$ homöomorph zu $\mathrm{SU}(2)$ ist.

Aufgabe 3: π_1 von topologischen Gruppen

Es sei G eine topologische Gruppe mit der Verknüpfung $\mu : G \times G \to G$ und dem neutralem Element $e \in G$. Es seien

$$i : G \to G \times G \,;\; g \mapsto (g, e) \quad \text{und} \quad j : G \to G \times G \,;\; g \mapsto (e, g)$$

die kanonischen Inklusionen.

a) Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G \times G, (e, e))$; $(\alpha, \beta) \mapsto i_*\alpha \cdot j_*\beta$ ein Isomorphismus von Gruppen ist.

b) Beweisen Sie die Formel $\mu_*(i_*\alpha \cdot j_*\beta) = \alpha \cdot \beta$ für alle $\alpha, \beta \in \pi_1(G, e)$.

c) Folgern Sie, dass die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe stets abelsch ist.

Aufgabe 4: Lift einer Gruppenstruktur

Es sei (G, μ, e) eine topologische Gruppe. Gegeben sei ferner ein topologischer Raum $\widetilde{G}$ und eine Überlagerung $p : \widetilde{G} \to G$, sowie ein Element $\tilde{e} \in \widetilde{G}$ mit $p(\tilde{e}) = e$. Beweisen Sie: Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde{\mu} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, so dass $(\widetilde{G}, \tilde{\mu}, \tilde{e})$ ebenfalls eine topologische Gruppe und $p : \widetilde{G} \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Informationen: Die Aufgaben werden in der Übung am 19. Mai besprochen.