Wir können die Metrik auf S^2 bestimmen, wenn wir (zumindest lokal) geeignete Koordinaten wählen. $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ kann man beispielsweise durch die stereographische Projektion $\sigma(x,y) = \frac{2}{1+x^2+y^2}(x,y,-1) + (0,0,1)$ parametrisieren. Man zeigt leicht, das $\sigma_x \perp \sigma_y$ und $\|\sigma_x\| = \|\sigma_y\| = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$ (s also konform) ist. Damit ist unsere Metrik also $s(t,r,x,y) = A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + \frac{4r^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ bzw die Matrix der Metrikkoeffizienten:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4r^2}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4r^2}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Aus den Metrikkoeffizienten g_{ij} kann man die Christoffelsymbole durch

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4} g^{ij}\left(\frac{g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{g_{im}}{\partial x^j} - \frac{g_{ij}}{\partial x^m}\right)$$

(da $\partial_m g_{ij} = g(\nabla_{\partial_m}\partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_m}\partial_j)$).

Weiter sind mit

$$R^i_{jkl} = \partial_l \Gamma^i_{kj} - \partial_k \Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

daraus die Tensorkomponenten des Krümmungsensors zu errechnen, die wiederum durch Kontraktion

$$R_{ij} = \sum_m R^m_{ijm}$$

die Komponenten der Ricci-Krümmung liefern. Wir haben das algebraisch mir MATHEMATICA ausgerechnet. Man findet heraus, dass *Ricc* nur diagonale Komponenten enthält und zwar

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{A''(x_2)}{2B(x_2)} + \frac{A'(x_2)B'(x_2)}{4B(x_2)^2} + \frac{A'(x_2)^2}{4A(x_2)B(x_2)} - \frac{A'(x_2)}{x_2 B(x_2)} \\
R_{22} &= -\frac{A''(x_2)}{2A(x_2)} + \frac{A'(x_2)B'(x_2)}{4A(x_2)B(x_2)} + \frac{A'(x_2)^2}{4A(x_2)^2} + \frac{B'(x_2)}{x_2 B(x_2)} \\
R_{33} &= -\frac{2x_2 A'(x_2)}{A(x_2)B(x_2)\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} + \frac{2x_2 B'(x_2)}{B(x_2)^2\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{4}{B(x_2)\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} - \frac{4x_3^2}{\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} + \frac{4}{x_3^2+x_4^2+1} - \frac{4x_4^2}{\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} \\
R_{44} &= -\frac{2x_2 A'(x_2)}{A(x_2)B(x_2)\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} + \frac{2x_2 B'(x_2)}{B(x_2)^2\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} \\
&\quad -\frac{4}{B(x_2)\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} - \frac{4x_3^2}{\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2} + \frac{4}{x_3^2+x_4^2+1} - \frac{4x_4^2}{\left(x_3^2+x_4^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Diese vier Einträge müssen verschwinden, damit unser Modell Ricci-flach ist (also verschwindende Ricci-Krümmung hat). Insbesondere muss dann aber $R_{11}/A(x_2) = R_{22}/B(x_2)$ gelten. Das liefert

$$0 = -\frac{B(x_2)A'(x_2) + A(x_2)B'(x_2)}{x_2 A(x_2) B(x_2)^2}$$

bzw. $\log(B(x_2))' = log(A(x_2))'$, was bedeutet, dass für eine Konstante c, $B = \frac{c}{A}$ gelten muss. Da asymptotisch $A = -1$ und $B = 1$ gelten soll, muss $c = -1$ sein. Setzt man also $B = -1/A$ ein erhält man beispielsweise

$$0 = R_{22} = -\frac{x_2 A''(x_2) + 2A'(x_2)}{2x_2 A(x_2)},$$

was als Lösung $A(x_2) = \frac{c_1}{x_2} + c_2$ hat. wiederum ist wegen der Asymptotik von A die Konstante $c_2 = -1$. Wir setzen $c_1 = 2M$ und haben damit wie behauptet

$$A(r) = \frac{2M}{r} - 1 \quad \text{und} \quad B(r) = \frac{-1}{A(r)}$$

gefunden. Es bleibt durch Einsetzen dieser Lösungen zu überprüfen, dass auch $R_{22} = R_{33} = R_{44} = 0$ ist.

Wichtig ist auch zu bemerken, dass zwar die Ricci-Krümmung verschwindet, der Krümmungstensor aber nicht identisch Null ist.

Bei einem Abstand von $r = 2M$ vom Symmetriezentrum bricht das Modell zusammen und für kleinere Abstände ist unsere Zeitkomponente t plötzlich raumartig und stattdessen r zeitartig. Bei einem "normalen" Stern ist das kein Problem, da $2M$ deutlich kleiner als derRadius des Sterns ist, an dessen Oberfläche unser Modell sowieso endet. Ist das Gestirn aber extrem massereich, so liegt dieser sog. Schwarzschildradius (oder Ereignishorizont) außerhalb des Himmelskörpers und man hat, ein Modell eines schwarzen Lochs.

Eine der ersten experimentellen Bestätigungen der allgemeinen Relativitätstheorie war dieBestimmung der Periheldrehung des Merkur. Man kann in unserem Modell jetzt Orbits von Testpartikeln berechnen. Dazu löst man die Geodätengleichung und betrachtet die Trajektorien. Qualitativ erhält man die gleichen Arten von möglichen Orbits wie in der Newtonschen Mechanik, allerdings haben die Entsprechungen der periodischen Orbits (die in der klassischen Mechanik Ellipsen sind) einen Korrekturterm, der den Punkt des geringsten Abstands wandern lässt. Diese Periheldrehung kann z.B. beim Planeten Merkur beobachtet werden und sie wird von der allgemeinen Relativitätstheorie befriedigend vorhergesagt.