Bemerkung. Die historisch bedingte Nomenklatur für den Krümmungstensor R bedingt eine angepasste Nummerierung der Tensorkomponenten von R:

$$R_{\partial_k \partial_l} \partial_j = \sum_i R^i_{jkl}$$

mit

$$R^i_{jkl} = \partial_l \Gamma^i_{kj} - \partial_k \Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj}$$

(nachrechnen).

Der Krümmungstensor ist relativ "unhandlich". Ein einfacherer Krümmungsbegriff, der nicht weniger Information beinhaltet ist der folgende:

Definition 4.10 *Sei* Π *eine nicht degenerierte 2-dimensionale Ebene in* T_pM *und* V, W *Basis von* Π. *Dann heißt*

$$k(\Pi) = k(V, W) := \frac{\langle R_{VW} V, W \rangle}{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle - \langle V, W \rangle^2}$$

Schnittkrümmung *von* Π.

Lemma 4.11 $k(\Pi)$ *ist unabhängig von der Wahl der Basis* V, W.

Beweis. Sowohl im Zähler als auch im Nenner ergibt einfaches einsetzen einen Faktor von $(ad - bc)^2$. □

Bemerkung. Man kann zeigen, dass k R in gewissem Sinne eindeutig bestimmt. Ist F ein Tensor mit den Symmetrieeigenschaften von R für den

$$\frac{F(V, W, V, W)}{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle - \langle V, W \rangle^2} = k(V, W)$$

gilt so ist $F = R$.

Eine andere Reduktion des Krümmungstensors, die allerdings mit Informationsverlust behaftet ist ist die im folgenden erklärte Ricci-Krümmung. Sie ist ein wesentlicher Baustein der allgemeinen Relativitätstheorie und der erwähnte Informationsverlust ist hier wesentlich: Wir werden im Folgenden sehen, dass verschwindende Ricci-Krümmung Vakuum modelliert, Krümmung aber Gravitation. Würde verschwindende Ricci-Krümmung verschwindende Krümmung implizieren, so wäre das Vakuum immer euklidisch und damit gravitationsfrei.

Definition 4.12 *Sei R Krümmungstensor auf M. die* Ricci-Krümmung *von M ist die Kontraktion $Ricc = C_3^1(R)$ des Krümmungstensors*

$$R_{ij} = \sum_m R_{ijm}^m$$

bzw. falls $\{E_i\}$ eine ON-Basis[18] *in T_pM ist*

$$Ricc(X,Y) = \sum_m \langle E_m, E_m \rangle \langle R_{X,E_m} Y, E_m \rangle .$$

Bemerkung. Für eine ON-Basis ist also insbesondere

$$\begin{array}{rcl} Ricc(E_1,E_1) & = & \sum_m \langle E_m, E_m \rangle \langle R_{E_1,E_m} E_1, E_m \rangle \\ & = & \sum_m \langle E_m, E_m \rangle \, k(E_1, E_m) \langle E_1, E_1 \rangle \langle E_m, E_m \rangle \\ & = & \langle E_1, E_1 \rangle \sum_m k(E_1, E_M) \end{array}$$

Gegeben eine Metrik g, so hat man eine kanonische Identifikation zwischen T_pM und T_pM^*. Zu einer 1-Form $\omega \in T_pM^*$ gibt es genau einen Vektor $V \in T_pM$ mit $\omega_i = \omega(\partial_i) = \langle V, \partial_i \rangle = \sum_j V^j \langle \partial_j, \partial_i \rangle = \sum_j g_{ij} V^j$. Schreibt man g^{ij} für die Koeffizienten der Inversen Matrix zu g_{ij}, so erhält man die V^j als $\sum_i g^{ij} \omega_i$.

Definition 4.13 *Die* Skalarkrümmung *S ist die Kontraktion der Ricci-Krümmung (so man mit der Identifikation $V \leftrightarrow \langle V, \cdot \rangle$ einen ko- in einen kontravarianten Eingang transformiert) und man hat*

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}.$$

Die klassischen Differentialoperatoren lassen sich alle in einem semi-Riemannschen Setup formulieren:

- Der *Gradient* einer Funktion f ist gegeben durch $\langle \operatorname{grad} f, V \rangle := df(V)$.
- Die *Divergenz* eines Tensors ist die Kontraktion der durch den Levi-Civita-Zusammenhang gegebenen Tensorderivation von ihm. Das ist im allgemeinen nicht eindeutig (man kann verschiedene Kontraktionen wählen), für ein Vektorfeld X hat man aber keine Wahl: $\div X := C(\nabla X)$ (man beachte, das das vektorielle Ergebnis der Ableitung wie üblich als kontravarianter Eingang interpretiert wird).

[18] Man beachte, das unser Skalarprodukt nur nicht degeneriert ist. Für eine ON-Basis ist also $\langle E_i, E_i \rangle = \pm 1$. Insbesondere benötigt also die Basisdarstellung dieses Vorzeichen $W = \sum_i \langle E_i, E_i \rangle \langle W, E_i \rangle E_i$.

- Die Hessische einer Funktion ist $Hess_f = \nabla\nabla f$. Sie ist symmetrische Bilinearform: $Hess_f(X,Y) = \nabla_Y(df)(X) = Y(df(X)) - df(\nabla_Y X) = YXf - (\nabla_Y X)f = XYf - (\nabla_X Y)f$ (da $XYf - YXf = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)f$).

Jetzt können wir eine Weitere (wichtige Beziehung zwischen Ricci-Krümmung und Skalarkrümmung formulieren.