Bemerkung. Man beachte, dass wegen der Jakobi-Identität

$$L_{[X,Y]}Z = [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = L_X L_Y Z - L_Y L_X Z$$

gilt.

4 Semi-Riemannsche Metrik

In der euklidischen Geometrie benutzt man das Skalarprodukt zum Messen von Größen, wie Winkeln, Längen (von Kurven) und ähnlichem. Wir werden das jetzt auf Mannigfaltigkeiten übertragen, allerdings erweitern wir den bekannten Begriff des Skalarproduktes[15] auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum zu nicht-degeneriert, fordern also für ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ statt positiver Definitheit ($\langle X,X,\rangle > 0$ für $X \neq 0$) nur noch, dass aus $\langle X,Y\rangle = 0$ für alle Y $X = 0$ folgt. Mit Index bezeichnen wir dann die Dimension des maximalen negativ definiten Unterraumes. Eine solche nicht-degenerierte Bilinearform definiert noch immer eine Paarung zwischen V und seinem Dualraum V^*: $X \mapsto \langle X,\cdot\rangle \in V^*$ ist kanonischer Isomorphismus. Da $\langle X,X\rangle$ für $X \neq 0$ nun nicht mehr notwendig positiv ist erklärt man X heißt

- *raumartig* falls $\langle X,X\rangle > 0$ (oder $X = 0$) ist,
- *lichtartig* falls $\langle X,X\rangle = 0$ (und $X \neq 0$) ist und
- *zeitartig* falls $\langle X,X\rangle < 0$ gilt.

$L = \{X \in V \mid \langle X,X\rangle = 0\}$ wird auch *Lichtkegel* genannt.

Die Länge eines Vektors wird jetzt durch $|V| := |\langle X,x\rangle|^{\frac{1}{2}}$ erklärt.

Ein reeller Vektorraum V mit $\dim V \geq 2$ zusammen mit einem Skalarprodukt mit Index 1 heißt *Minkowskiraum.*

Der Begriff einer symmetrischen Bilinearform überträgt sich auf natürliche Weise auf Tensorfelder.

Definition 4.1 *Ein* Metriktensor *auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein symmetrisches $(0,2)$-Tensorfeld mit konstantem Index.*

Eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit *ist eine Mannigfaltigkeit M mit einem Metriktensor g. Ist der Index 0, so nennt man sie auch Riemannsch, ist der Index 1 und* $\dim M > 1$*, so heißt sie auch* Lorentz Mannigfaltigkeit.

[15]Also den Begriff einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform auf einem Vektorraum.

Bemerkung. Der Metriktensor wird meist mit g oder $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet, seine Tensorkomponenten mit $g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. In jedem Punkt $p \in M$ ist $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dann ein Skalarprodukt.

Beispiel 4.1

- $\mathbb{R}^n$ *wird mit dem kanonischen Skalarprodukt auf jedem Tangentialraum zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.*

- *Jede Untermannigfaltigkeit N vom $\mathbb{R}^n$ wird durch Einschränken der Metrik auf seinen Tangentialraum selbst zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Ist $j : N \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Inclusionsabbildung, so ist der Metriktensor g_N auf N der Pullback $g_N := j^* g_{\mathbb{R}^n}$.*

Definition 4.2 *Zwei Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten M und N heißen* isometrisch, *falls es einen Diffeomorphismus $\phi : M \to N$ gibt mit $g_M = \phi^* g_N$.*

Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, so kann man ihre Länge auf $[a, b] \subset I$ durch $L_{a,b}(\gamma) := \int_a \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \, dt$ bestimmen. Für eine Kurve $\delta : I \to M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit erklären wir entsprechend $L_{a,b}(\delta) := \int_a^b \sqrt{g_{\delta(t)}(\delta'(t), \delta'(t))} \, dt$.

Wir möchten im weiteren Verlauf einen Krümmungsbegriff einführen. Dazu folgende Beobachtung: Krümmung bestimmt man im $\mathbb{R}^n$ durch Ableiten. Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ glatt mit $|\gamma'| = 1$, so ist die Krümmung von γ durch $\kappa = |\gamma''|$ gegeben.

Wir betrachten jetzt also, wie man allgemein ein Tangentialvektorfeld ableitet. Sind $V, W \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$, so ist die Richtungsableitung[16] $D_V W = \sum V(W^i)\partial_i$. Ist jetzt M (nicht offene) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so geht das nicht mehr. da i. a. $D_V W \notin TM$ ist. Man kann jedoch in jedem Punkt p auf T_pM projizieren:

$$\nabla_V W := \pi(D_v W)$$

. Für eine allgemeine Mannigfaltigkeit haben wir keinen umgebenden euklidischen Raum mehr. wir axiomatisieren also die Eigenschaften dieser Ableitung: Zunächst ist sie sicher $\mathbb{R}$-bilinear. Da eine Richtungsableitung in ihrer Richtung nur vom Richtungsvektor (nicht Vektorfeld!) abhängt, ist sie als

[16]Genaugenommen benötigt man nur einen Tangentialvektor und kein Vektorfeld für die Richtungsableitung.

Abbildung $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ im ersten Eingang sogar $\mathcal{F}(M)$ linear[17]. Im zweiten muss wie gewohnt eine “Produktregel” gelten.

Darüberhinaus hat man allerdings noch zwei weitere Eigenschaften. Zum einen ist

$$\begin{aligned} [V,W]f &= VWf - WVf = V(Df(W)) - W(Df(V)) \\ &= \sum_{i,j} V^j \left[\partial_j W^i \partial_i + W^i \partial_j \partial_i f\right] + \sum_{j,i} W^i \left[\partial_i V^j \partial_j f + V^j \partial_i \partial_j f\right] \\ &= \sum_{i,j} V^j \partial_j W^i \partial_i f + \sum_{j,i} W^i \partial_i V^j \partial_j f \\ &= (D_V W - D_W V) f), \end{aligned}$$

zum anderen kann man das Skalarprodukt bilinear richtungsableiten $D_U \langle V, W \rangle = \langle D_U V, W \rangle + \langle V, D_U W \rangle$.

Definition 4.3 *Ein* Zusammenhang *auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung $D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, für die gilt:*

1. *D ist $\mathcal{F}(M)$-linear im 1. Eingang*
2. *D ist $\mathbb{R}$-linear im 2. Eingang und*
3. *$D_V(fW) = V(f)W + fD_V(W)$ für alle $V, W \in \Gamma(TM)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.*

Ist M semi-Riemannsch und gilt darüber hinaus für alle $U, V, W \in \Gamma(TM)$

4. *$[V, W] = D_V W - D_W V$ und*
5. *$U(\langle V, W \rangle) = \langle D_U V, W \rangle + \langle V, D_U W \rangle$,*

so heißt D Levi-Civita-Zusammenhang *und man schreibt $\nabla_V W := D_V W$.*

Das diese Axiomatik “Sinn” macht zeigt das folgende Lemma:

Lemma 4.4 *Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ ist auf einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt und durch die* Kozul-Formel *gegeben:*

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_V W, U \rangle &= V \langle W, U \rangle + W \langle U, V \rangle - U \langle V, W \rangle \\ &\quad - \langle V, [W, U] \rangle + \langle W, [U, V] \rangle + \langle U, [V, W] \rangle . \end{aligned}$$

Beweis. Angenommen D ist ein Levi-Civita-Zusammenhang, dann gilt die Kozul-Formel für D: Wendet man die Bedingungen 5. und 4. auf die Rechte Seite der Formel an, so kürzen sich alle Terme, bis auf zwei, die die Linke Seite der Formel ergeben. Jeder Levi-Civita-Zusammenhang erfüllt also

[17] Damit man das tuen kann muss man zunächst einmal Vektorfelder auf M zumindest lokal zu solchen auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen, und dann zeigen, das das Ergebnis nicht von der Fortsetzung abhängt.

diese Formel und da $\langle \nabla_V W, \cdot \rangle \mapsto \nabla_V W$ ein Isomorphismus ist, ist der Levi-Civita-Zusammenhang eindeutig, falls er existiert. Für die Existenz setzt man die rechte Seite der Kozul-Formel und und zeigt, das sie in U eine Linearform ist (zwei der Summanden sind $\mathcal{F}(M)$-linear in U, bei den anderen beiden heben sich jeweils die Terme, die von $[fU, X] = -XfU + f[U, X]$ und $X(f \langle U, Y \rangle) = Xf \langle U, Y \rangle + fX \langle U, Y \rangle$ kommen weg). $2 \langle \nabla_V W, U \rangle$ definiert also ein eindeutiges Vektorfeld und man zeigt analog oder durch Einsetzen, das es die nötigen Eigenschaften 1. - 5. besitzt. $\square$