Definition 3.11 *Sei V $\mathbb{R}$-Vektorraum.* $[\cdot,\cdot] : V \times V$ *mit Eigenschaften 1. bis 3. aus Lemma 3.10 heißt* (reelle) Lieklammer *und das Paar*$(V, [\cdot,\cdot])$ Liealgebra.

Beispiel 3.4

- *Die Tangentialvektorfelder $\Gamma(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M bilden eine Liealgebra.*
- $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ *wird mit* $[A, B] := AB - BA$ *zu einer Liealgebra.*

3.2 Tensoren "in a nutshell"

Definition 3.12

- *Sei V R-Modul*[12]*, $r, s \geq 0$, r oder s ungleich* 0. *Eine Multilinearform $A : V^{*r} \times V^s \to R$ heißt* (r, s)-Tensor *(man sagt A sei r-fach* contravariant *und s-fach* covariant*). Die Menge der (r, s)-Tensoren bildet selbst wieder einen R-Modul.*

- *Ein* (r, s)-Tensorfeld *auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Schnitt im Vektorbündel*

$$T^r_s(M) := \dot{\bigcup_{p \in M}} T_pM^{*r} \times T_pM^s.$$

Alternativ kann man $T^r_s(M)$ als Tensor auf dem $\mathcal{F}(M)$-Modul $\Gamma(TM^*)^r \times \Gamma(TM)^s$ erklären (die Äquivalenz dieser beiden Definitionen ist nicht komplett offensichtlich).

Bemerkung.

- Offenbar ist $T^1_0(M) = \Gamma(TM^*)$. Man kann auch $T^0_1(M)$ mit $\Gamma(TM)$ identifizieren: Ein Vektorfeld V wirkt auf $\omega \in \Gamma(TM^*)$ durch $V(\omega) := \omega(V)$. Schließlich setzt man noch $T^0_0(M) := \mathcal{F}(M)$.

- Mit der 2. Definition von Tensorfeld ist klar, das Tensorfelder $\mathcal{F}(M)$-linear sind.

- Ein $(1, 0)$-Tensorfeld wird auch *1-Form* genannt.

[12] Ein Modul ist die selbe Struktur wie ein Vektorraum nur das der Körper für die Skalarmultiplikation durch einen Ring ersetzt ist.

Definition 3.13 *Das* Tensorprodukt *eines (r,s)-Tensors A mit einem $(\tilde{r},\tilde{s})$-Tensor B ist der $(r+\tilde{r}, s+\tilde{s})$-Tensor $A\otimes B$ gegeben durch:*

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(\omega_1,\ldots,\omega_{r-\tilde{r}},v_1,\ldots,v_{s+\tilde{s}}) &= A(\omega_1,\ldots,\omega_r,v_1\ldots,v_s)\\ &\quad\cdot B(\omega_{r+1},\ldots,\omega_{r+\tilde{r}},v_{s+1},\ldots,v_{s+\tilde{s}}).\end{aligned}$$

Offenbar ist $\otimes$ $\mathcal{F}(M)$-linear und assoziativ.

Sei $\phi = (x^1,\ldots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ Koordinatensystem auf M. $\partial_1,\ldots,\partial_n$ bilden in jedem $p\in U$ eine Basis von T_pM. $dx^1,\ldots,dx^n$ bezeichne die duale Basis[13]. Als multilineare Abbildung ist ein (r,s)-Tensor A jetzt durch seine Werte auf diesen Basen eindeutig bestimmt:

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} := A(dx^{i_1},\ldots,dx^{i_r},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_s})$$

heißen die *Tensorkomponenten* von A bezüglich ϕ.

Definition 3.14 *(und Lemma) Die Kontraktion C ist die eindeutige $\mathcal{F}(M)$-lineare Abbildung $C : T^1_1(M) \to \mathcal{F}(M)$, für die gilt: $C(X\otimes\omega) = \omega(X)$. Die (i,j)-Kontraktion C^i_j eines (r,s)-Tensors A, $r\geq i$, $s\geq j$ ist der $(r-1,s-1)$-Tensor $C^i_j(A)$ mit:*

$$\begin{aligned}C(A)(\omega_1,\ldots,\omega_{r-1},v_1,\ldots,v_s) &= C(A(\omega_1,\ldots,\omega_{i-1},\cdot,\omega_{i+1},\ldots,\omega_r-1,\\ &\qquad v_1,\ldots,v_{j-1},\cdot,v_j,\ldots,v_{s-1})).\end{aligned}$$

Beweis. (der Eindeutigkeit) In einem Koordinatensystem $\phi : U\to\mathbb{R}^n$ kann man X und ω als $X = \sum X^i\partial_i$ und $\omega = \sum\omega_j dx^j$ schreiben[14]. Dann ist aber

$$C(X\otimes\omega) = \sum_{i,j} X^i\omega_j C(\partial_i\otimes dx^j) = \sum_{i,j} X^i\omega_j dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}.$$

Also ist für einen $(1,1)$-Tensor A

$$C(A) = \sum_i A^1_1 = \sum_i A(dx^i,\partial_i).$$

Diese Darstellung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems: Ist $\eta = (y^1,\ldots,y^n) : V\to\mathbb{R}^n$ ein weiteres Koordinatensystem, so gilt auf $U\cap V$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_l A(\frac{\partial}{\partial y_l}, dy^l) &= \textstyle\sum_l A(\sum_i \frac{\partial y^l}{\partial x^i}dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^l \frac{\partial}{\partial x^j}}) = \sum_{i,j,l}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}A(dx^i,\frac{\partial}{\partial x^j})\\ &= \textstyle\sum_{i,j}\delta_{ij}A(dx^i,\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_i A(dx^i,\frac{\partial}{\partial x^i}).\end{aligned}$$

[13]Die dx^i sind wirklich die Differentiale der Koordinatenfunktionen x^i denn $dx^i(\partial x_j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_{ij}$.

[14]Für X ist das klar, ω ist durch seine Werte auf ∂_i bestimmt aber es gilt mit $\omega_j = \omega(\partial_j)$, dass $\omega(\partial_i) = \omega_i dx^i(\partial_i) = \sum\omega_j dx^j(\partial_i)$.

□

Wir beschreiben jetzt eine Möglichkeit mit Hilfe einer Glatten Abbildung einen kontravarianten Tensor von der Bildmannigfaltigkeit zurück auf die Urbildmannigfaltigkeit zu transportieren

Definition 3.15 *Sei $f : M \to N$ glatt und $A \in T^0_s(N)$. Der* Pullback *von A durch f ist $f^*(A) \in T^0_s(M)$ gegeben durch:*

$$f^*(A)(v_1, \dots, v_n) := A(df(v_1), \dots, df(v_n)).$$

Bisher haben wir Tensoren im wesentlichen algebraisch behandelt, jetzt wollen wir tensoriell ableiten:

Definition 3.16 *Eine* Tensorderivation *D ist eine Menge von Abbildungen $D = D^r_s : T^r_s(M) \to T^r_s(M)$, so dass für alle Tensoren A und B gilt:*

- *$D(A \otimes B) = D(A) \otimes B + A \otimes D(B)$ und*
- *$D(C(A)) = C(D(A))$ für alle Kontraktionen C.*

Bemerkung. Da $T^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$ ist, ist D^0_0 eine Derivation – also gibt es ein Vektorfeld V mit $D^0_0(f) = V(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}(M)$.

Wir zeigen jetzt, das eine Tensorderivation durch ihr Verhalten auf $\mathcal{F}(M)$ und $\Gamma(TM) = T^0_1(M)$ eindeutig bestimmt ist. Zunächst bemerken wir, dass für $A \in T^0_1(M)$ bzw. $B \in T^1_0(M)$ in einem Koordinatensystem $A(X) = \sum_i A_i X^i$ bzw. $B(\omega) = \sum_j B^j \omega_j$ gilt. Also ist $A(X) = C(A \otimes X)$ und $B(\omega) = C(B \otimes \omega)$. Dann ist aber z.B.

$$D(A(X)) = D(C(A \otimes X)) = C(D(A \otimes X)) = C(D(A)) + C(D(X))$$

. Wir können also die Tensorderivation auf einer 1-Form A durch ihre Werte auf Funktionen und Vektorfeldern bestimmen. Entsprechend erhält man allgemeiner für einen (r, s)-Tensor A

$$\begin{aligned} D(A(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)) \quad = \quad & (D(A))(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) \\ & + \textstyle\sum_i A(\omega_1, \dots, D\omega_i, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) \\ & + \textstyle\sum_j A(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, Dv_j, \dots, v_s). \end{aligned}$$

Ersetzt man jetzt noch die $D\omega_i$ wie oben, hat man den Wert von DA wie behauptet durch Evaluation von D auf $\mathcal{F}(M)$ und $\Gamma(TM)$ bestimmt.

Lemma 3.17

- *Stimmen zwei Tensorderivationen auf Funktionen und Vektorfeldern überein, so sind sie gleich.*

- *Gegeben ein Vektorfeld V und eine Abbildung $\delta : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ mit $\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X)$, so existiert eine eindeutige Tensorderivation D mit$D(f) = V(f)$ und $D(X) = \delta(X)$.*

Beweis. Die erste Behauptung haben wir oben gezeigt, die zweite ist einfaches nachrechnen. □

Beispiel 3.5 *Für ein Vektorfeld V heißt L_V mit $L_V(f) = V(f)$ und $L_V(W) = [V, W]$ die* Lieableitung *in Richtung V. Man rechnet leicht nach, dass die Bedingung aus dem Lemma erfüllt ist (das ist genau die Tatsache, das die Lieklammer für Vektorfelder* kein *Tensor ist) und also eine Tensorderivation definiert.*