Tangentialvektorfelder werden auch *Derivationen* genannt: $X \in \Gamma(TM)$ kann man nämlich auch als Abbildung $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ betrachten, die $\mathbb{R}$-linear ist und die Leibnizregel erfüllt.

Beispiel 3.1

- *Ist* $f : M \to N$ *glatt und* $v \in \Gamma(TM)$, *so ist* $df(v)$, $p \mapsto d_p f(v_p) \in T_{f(p)}N$ *ein Vektorfeld längs* f.
- $M \times \mathbb{R}^k$ *ist natürlich trivial.*
- TS^2 *ist nicht trivial.*

Definition 3.5 $TM^* := \dot{\bigcup} T_pM^*$ *heißt* Kotangentialbündel *und ist genau wie* T_pM *auf kanonische Weise ein Vektorbündel.*

3.1 Wirkungen, Flüsse, Integralkurven

Definition 3.6 *Sei* X *eine Menge,* G *eine Gruppe. Eine* (Links-) Gruppenwirkung *von* G *auf* X *ist eine Abbildung von* $\Phi : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- *Ist* e *Neutrales Element in* G *so ist* $e \cdot x = x$ *für alle* $x \in X$.
- *Für alle* $g, h \in G$ *und* $x \in X$ *gilt* $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Beispiel 3.2

- *Eine Gruppe* G *wirkt auf sich selbst durch Linksmultiplikation* $(g, h) \mapsto g \cdot h = gh$. *Auch wenn das recht trivial wirkt, wird diese Wirkung in der Theorie der Liegruppen eine gewichtige Rolle spielen.*
- *Sei* V *Vektorraum. Die Automorphismen*[10] *auf* V $Aut(V)$ *wirkt auf* V *durch* $A \cdot v = A(v)$.
- $SL(2, \mathbb{C})$ *wirkt auf* $\bar{\mathbb{C}}$ *durch gebrochen lineare Funktionen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

[10] Automorphismen sind bekanntlich die bijektiven linearen Abbildungen von V auf sich. Sie bilden mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe.

Definition 3.7 *Sei X eine Menge. Eine Linksgruppenwirkung von* $(\mathbb{R},+)$ *auf X heißt* Fluss *auf X.*

Beispiel 3.3 $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C}$; $(t,z) \mapsto e^{it}z$ *ist Fluss auf* $\mathbb{C}$.

Wir werden jetzt den aus der Analysis geläufigen Begriff der Integralkurve auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Zur Erinnerung: Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt, so sichert uns die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zu, dass es zu jedem $p \in \mathbb{R}^n$ $\delta, \epsilon > 0$ gibt und eine glatte Kurve $\gamma : (-delta, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\frac{d}{dt}\gamma = F(\gamma)$. γ heißt dann Integralkurve von F. Offenbar geht durch jeden Punkt genau eine maximale Integralkurve – also eine mit maximalem Definitionsbereich.

Ganz entsprechend können wir Integralkurven auf Mannigfaltigkeiten erklären:

Definition 3.8 *Sei M Mannigfaltigkeit, $V \in \Gamma(TM)$. Eine Kurve $\gamma : I \to M$ auf M heißt* Integralkurve *von V durch $p \in M$, falls $\gamma(0) = p$ und $\frac{d}{dt} = V(\gamma)$. Eine Integralkurve durch p heißt maximal, falls ihr Definitionsbereich maximal ist. Ein Vektorfeld heißt* vollständig*, falls jede seiner maximalen Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.*

Die Existenz von (und Eindeutigkeit von maximalen) Integralkurven auf Mannigfaltigkeiten folgt aus der im $\mathbb{R}^n$: Ist für eine Mannigfaltigkeit M; $V \in \Gamma(TM)$, $p \in M$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem in p, so ist $\tilde{V}(x) = d_{\phi^{-1}(x)}\phi(V)$ Vektorfeld auf $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Ist nun $\tilde{\gamma}$ Integralkurve von $\tilde{V}$ in $\phi(p)$, so sieht man leicht ein, dass $\gamma := \phi^{-1}(\tilde{\gamma})$ Integralkurve von V ist:

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\phi^{-1}(\tilde{\gamma}) = d_{\tilde{\gamma}}\phi^{-1}(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}) = d_{\tilde{\gamma}}\phi^{-1}(d_{\gamma}\phi(V)) = V.$$

Wir benutzen hier, dass natürlich $d\phi^{-1} \circ d\phi = id$ ist[11].

Sei M Mannigfaltigkeit, $V \in \Gamma(TM)$und bezeichne γ_p die maximale Integralkurve durch p. Sei $\Phi_t(p) := \gamma_p(t)$. Ist V vollständig, so ist Φ ein Fluss auf M. Ist V nicht vollständig, so nennt man Φ auch einen lokalen Fluss.

Nun können Integralkurven sich nicht schneiden und $t \mapsto \Phi_t(p)$ ist Integralkurve, also ist $p \mapsto \Phi_{t_0}(p)$ ein Diffeomorphismus von M auf sich.

Definition 3.9 *Sei M Mannigfaltigkeit, $V, W \in \Gamma(TM)$. Die* Lieklammer *von V und W ist das Vektorfeld $[V,W]$, das durch $[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f))$ gegeben ist.*

[11] Das ist aber klar, denn $d\phi(w)(g) = w(g \circ \phi)$, also $d\phi^{-1} \circ d\phi(v)(f) = d\phi(v)(f \circ \phi^{-1}) = v(f \circ \phi^{-1} \circ \phi) = v(f)$

Es ist leicht zu überprüfen, das $[V,W]$ in der Tat ein Vektorfeld ist: $[\cdot,\cdot]:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$.

Lemma 3.10 *Für die Lieklammer gilt für alle $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$:*

1. $[X,Y]$ *ist* $\mathbb{R}$*-linear.*
2. $[X,X]=0$ *(und also* $[X,Y]=-[Y,X]$*).*
3. *Es gilt die Jakobi-Identität:* $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.
4. *Ist* Φ *lokaler Fluss von* X *in der Nähe von* p*, so ist*
$$[X,Y]|_p=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(d\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}-Y_p).$$

Beweis. Die ersten drei Behauptungen sind direkt klar, oder leicht nachzurechnen. Um die vierte zu zeigen nehmen wir zunächst an, dass $X_p\neq 0$ ist und konstruieren ein an X angepasstes Koordinatensystem in p: $t\mapsto\Phi_t(p)$ ist Kurve bzw. 1-dim Untermannigfaltigkeit in M. Sei $\phi:U\to\mathbb{R}^n$ Koordinatensystem in p mit $\phi(p)=0$.. $t\mapsto\phi\circ\Phi_t(p)$ ist dann Kurve in $\mathbb{R}^n$ und Wir können annehmen, dass ihre Ableitung in $\phi(p)$ transversal zum Spann von $e_2,\ldots,e_n$ ist. Dann ist $N=\phi^{-1}(\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}\cap\phi(0))$ $n-1$-dim Untermannigfaltigkeit von M, die p enthält. sei $\eta:V\to\mathbb{R}^{n-1}$ Koordinatensystem auf N in p. Für kleine t_0 ist auf einer kleinen Umgebung W von p die Abbildung $q\mapsto\Phi_{t_0}(q)$ Diffeomorphismus. Damit wird $\nu^{-1}:(-epsilon,\epsilon)\times\eta(W\cap N)\to M$, $(t,x)\mapsto\Phi_t(\eta^{-1}(x))$ ebenfalls zu einem Diffeomorphismus auf sein Bild und ν ist ein Koordinatensystem in p, für das $\partial_1=X$, $\nu_i(\Phi_t(q))=\nu_i(q)+t\delta_{i1}$ und $d\Phi_t(\partial_i)=\partial_i$ ist.

Mit $g(t):=d\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)})=d\Phi_{-t}(\sum Y_i(\Phi_t(p))\partial_i)=\sum Y_i(\Phi_t(p))\partial_i|_p)$ ist dann

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(d\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}-Y_p) &= g'(0)=\sum_i\frac{d}{dt}Y_i(\Phi_t(p))\partial_i|_p=\sum_i dY_i(d\Phi_0(p))\partial_i|_p\\ &= \sum_i VX(Y_i)\partial_i=\sum_i\partial_1(Y_i)\partial_i.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}X(Y(f))-Y(X(f)) &= \partial_1(\sum_i Y_i\partial_i(f)-\sum_i Y_i\partial_i(\partial_1(f))\\ &= \sum_i\partial_1 Y_i\partial_i(f)+\sum_i Y_i\partial_1\partial_i(f)-\sum_i Y_i\partial_i\partial_1(f)\\ &= \sum_i\partial_1 Y_i\partial_i(f)\end{aligned}$$

Da die zweiten partiellen Ableitungen einer jeden Funktion f vertauschen.

Im Fall $X_p \neq 0$ haben wir also die Gleichheit. Verschwindet X auf einer ganzen Umgebung von p, so sind beide Seiten Null und die Behauptung gilt ebenfalls. Ist schließlich $X|_p = 0$, verschwindet aber auf keiner Umgebung von p, so findet man eine gegen p konvergente Folge von Punkten q_n mit $X|_{q_n} \neq 0$. Da beide Seiten stetig im Punkt sind, folgt die Behauptung in p dann aus Stetigkeitsgründen. □

Beispiel 3.4

- *Die Lieklammer ist nicht $\mathcal{F}(M)$-Linear. Es gilt $[fV, W] = f[V, W] - W(f)V$.*
- *Für Gaußvektoren hat man immer $[\partial_i, \partial_j] = 0$.*