Zurück zu Tangentialvektoren. T_pM ist also n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum (und damit eine Mannigfaltigkeit). Wir übertragen jetzt die Tatsache, dass für glatte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ das Differential $D_pf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist.

Definition 2.20 *Sei $\Psi : M \to N$ glatt. Das Differential von Ψ in $p \in M$ ist die lineare Abbildung $d_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ für die für alle $f \in \mathcal{F}(M)$*

$$d_p\Psi(v)(f) = v(f)$$

gilt.

Offenbar ist $d_p\Psi$ linear, wir müssen aber noch zeigen, das $d_p\Psi(v) \in T_{\Psi(v)}N$ (also wirklich Tangentialvektor ist). Auch hier ist $\mathbb{R}$-Linearität klar und es gilt: $d_p\Psi(v)(fg) = v((fg)(\Psi)) = v((f \circ \Psi)(g \circ \Psi)) = v(f \circ \Psi)g(\Psi(p)) + f(\Psi(p))v(g \circ \Psi) = d_p\Psi(v)(f)g(\Psi(p)) + f(\Psi(p))d_p\Psi(v)(g)$. Also ist $d_p\Psi(v)$ wirklich Tangentialvektor in $\Psi(p)$.

Beispiel 2.7

- *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\partial_v(\cdot)|_p$, $f \mapsto <\operatorname{grad} f(p), v>$ Tangentialvektor in p. Wir identifizieren also $T_p\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$. Ist nun $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ glatt, so ist $D_pg : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und mit obiger Identifikation $D_pg \equiv d_pg$.*

- *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und M Mannigfaltigkeit. $\gamma : I \to M$ glatt heißt* Kurve. *Offenbar ist $\partial_1\gamma|_{t_0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t_0} \in T_pM$. Ist nun weiter $f \in \mathcal{F}(M)$ kann man $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ betrachten und es ist $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t_0} = d_{\gamma(t_0)}f(\partial_1\gamma|_{t_0})$. Man hätte Tangentialvektoren also auch über Kurven und ihre Ableitungen einführen können.*

- *$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n,n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ ist offen in $Mat(n,n,\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ – also offene Untermannigfaltigkeit.* $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *ist glatt und es gilt* $\det(E + tB) = E + t\operatorname{Spur}(B) + O(t^2)$ *und* $\frac{d}{dt}\det(E + tB) = \operatorname{Spur}(B)$.

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ mit $df \neq 0$, so ist $N = \{p \in M \mid f(p) = c\}$ (Unter-)Mannigfaltigkeit: Der Satz über implizite Funktionen garantiert, dass man N lokal als Graph schreiben kann. Die Dimension ist $\dim N = \dim M - 1$.

Beispiel 2.8 *$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ ist $n^2 - 1$ dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Allgemeiner zeigt man

Definition 2.21 *Sei M Mannigfaltigkeit. $N \subset M$ heißt* Untermannigfaltigkeit *von M, falls N topologischer Unterraum ist (mit induzierter Topologie), die Inklusion $j : N \hookrightarrow M$ glatt und dj injektiv ist.*

auns

Beispiel 2.9 *Offene Untermannigfaltigkeiten sind Untermannigfaltigkeiten, $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist Untermannigfaltigkeit, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist Untermannigfaltigkeit.*

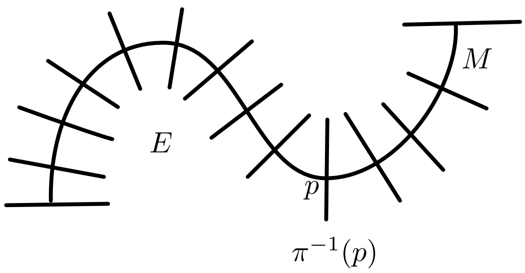
3 Vektorbündel und Tangentialbündel

Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit M ist die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume von M: $TM := \dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM$ versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur. Konzeptionell ist es ein Spezialfall eines Vektorbündels:

Definition 3.1 *Ein k-—*Vektorbündel (E, π) *(oder nur E) über einer Mannigfaltigkeit M ist eine Mannigfaltigkeit E mit einer glatten Abbildung $\pi : E \to M$, so dass*

1. *Für alle $p \in M$ ist $\pi^{-1}(p)$ k-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum.*
2. *Für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$, $p \in U$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U) \subset E$, so dass für alle $q \in U$ $v \mapsto \Phi(q, v)$ ein linearer Isomorphismus $\mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(q)$.*

Man nennt M auch Basismannigfaltigkeit, E Totalraum, π Projektion, $\pi^{-1}(p)$ Faser über p und Φ Bündelkarte.



Eine Kurve in der Ebene als Basismannigfaltigkeit mit ihren Normalengraden als Fasern.

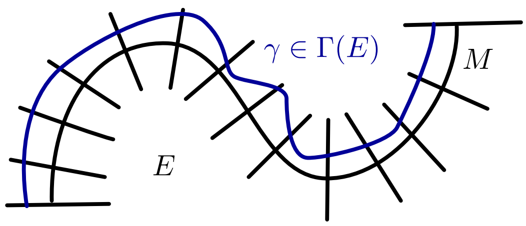
Definition 3.2 *(und Beispiel)*
Sei M n-dimensionale Mannigfaltigkeit. $TM = \dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM = \{(p, v) \,|\, p \in M, v \in T_pM\}$ heißt das Tangentialbündel *von M.*

Lemma 3.3 *TM ist auf natürliche Weise ein n-Vektorbündel über M.*

Beweis. Skizze: Sei $\phi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ Karte auf M. Setze $\Phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(p, v) = (p, \sum v_i \partial_i) \mapsto (\phi(p), v_1, \dots, v_n)$. Φ ist bijektiv und diese Abbildungen überdecken TM. Man kann nun zeigen, dass – $V \subset TM$ offen $\Leftrightarrow$ $\Phi(V \cap \pi^{-1}(U))$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ für alle Karten ϕ auf M – eine Haussdorff'sche Topologie mit abzählbarer Basis auf TM definiert. Man zeigt auch leicht, das die Karten Φ verträglich und Bündelkarten sind. □

Definition 3.4

1. *Sei E k-Vektorbündel über M eine (glatte) Abbildung $X : M \to E$ heißt (glatter)* Schnitt *in E, falls $\pi \circ X = id_M$.*
2. *Die Menge aller glatten Schnitte in E wird mit $\Gamma(E)$ bezeichnet.*
3. *Ein k-Vektorbündel heißt* trivial, *falls es k linear unabhängige, nirgends verschwindende Schnitte besitzt.*
4. *Ein (glatter) Schnitt in TM heißt* Tangentialvektorfeld *auf M.*
5. *Ein Vektorfeld längs einer Abbildung $f : M \to N$ ist eine Abbildung $X : M \to TN$ mit $\pi \circ X = f$.*



Ein nirgens verschwindender Schnitt γ im 1-Vektorbündel E. Dieses Bündel ist also trivial.