Beweis. (Fortsetzung) Wir zeigen jetzt, das die Gaußvektoren ∂_i ein Erzeugendensystem bilden. Dazu bemerken wirzunächst, das für eine Funktion $g\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einer kleinen Umgebung der Null gilt, das

$$g(q) = g(0)+\int_0^1 D_{tq}g(q) = g(0)+\int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i g|_{tq}q_i\;dt = g(0)+\sum_{i=1}^n \int_0^1 \partial_i g|_{tq}\;dtq_i.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, das $\phi(p) = 0$ ist. Dann gilt für $g = f \circ \phi^{-1}$:

$$f \circ \phi^{-1}(q) = f(\phi^{-1}(0)) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}|tq\;dtq_i$$

beziehungsweise mit $q_i = \phi_i(\phi^{-1}(q))$ und $f_i = \int_0^1 \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}|tq\;dt$

$$f = f(0) + \sum_{i=0}^n f_i\phi_i.$$

Nun ist aber in p

$$\partial_j f = \partial_j(f(0) + \sum_{i=0}^n f_i\phi_i = \sum_{i=1}^n \partial_j f_i\phi_i(p) + f_i(p)\partial_j\phi_i = f_j.$$

Also gilt für jeden Tangentialvektor $v \in T_pM$

$$v(f) = 0 + \sum_{i=1}^n v(f_i)\phi_i(p) + f_i(p)v(\phi_i) = \sum_{i=1}^n v(\phi_i)\partial_i(f)v(\phi_i).$$

Da dies für jede Funktion f gilt ist v also als Linearkombination der ∂_i darstellbar. □

Wir müssen uns jetzt noch darum kümmern, warum die rein lokale Argumentation erlaubt ist. Der *Träger* $\operatorname{supp} f$ einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist der Abschluss der Menge $\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}$. Ist jetzt $U \subset M$ offen und $p \in U$, so existiert eine Funktion $f : m \to U$ mit

1. $0 \leq f \leq 1$
2. $\operatorname{supp} f \subset U$
3. $f \equiv 1$ auf einer Umgebung von p.

Um das zu zeigen benutzen wir die Tatsache, das die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

C^∞ ist. Wir setzen $\tilde{h}(t) = \int_0^t h(x)h(1-x)\,dx$, was eine Funktion liefert, die zwischen 0 und 1 streng monoton wächst und sonst konstanten ist, und erhalten mit $r(t) = \frac{\tilde{h}(1-\frac{t-\epsilon}{\epsilon})}{\tilde{h}(1)}$ eine Funktion, die zwischen 0 und ϵ 1 ist, zwischen ϵ und 2ϵ streng monoton auf 0 fällt, und sonst konstant ist. Ist jetzt U offen mit $p \in U$ und ϕ ein Koordinatensystem in p, so wählen wir ϵ so, dass alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\phi(p) - x\|^2 \leq 3\epsilon$ in $\phi(U)$ liegen. $f(q) := r(\|\phi(p) - \Phi(q)\|^2)$ ist dann eine Funktion mit den gesuchten Eigenschaften.

Mit solchen Funktionen können wir Funktionen, die nur lokal definiert sind (und deren Werte uns nur lokal in der Nähe eines Punktes interessieren) zu Funktionen auf ganz M fortsetzen: Wir erklären sie außerhalb einer passenden offenen Umgebung zu Null und multiplizieren sie mit einer geeigneten Funktion wie oben, um einen glatten Abfall auf Null sicher zu stellen.

Jetzt müssen wir noch sicherstellen, das solche Modifikationen unsere Ergebnisse nicht verfälschen: Es gilt aber zum Glück, das falls zwei Funktionen f und g aus $\mathcal{F}(M)$ auf einer Umgebung U von p übereinstimmen, Tangentialvektoren in p auf ihnen den selben Wert haben: Ist $f \equiv g$ auf $U \ni p$, so ist für alle $v \in T_pM$ $v(f) = v(g)$.

Um das einzusehen, betrachten wir eine Funktion h mit $\operatorname{supp} h \subset U$ und $h(p) = 1$. Dann ist $(f-g)h \equiv 0$ auf M und damit

$$0 = v((f-g)h) = v(f-g)h(p) + (f-g)(p)v(h) = v(f) - v(g) + 0.$$

Also ist $v(f) = v(g)$.

Funktionen, wie wir sie eben konstruiert haben spielen eine wichtige Rolle, wenn es darum geht, Dinge, die man nur lokal definiert oder erklärt hat zu einem Ganzen zusammen zu setzen. Das tut man gemeinhin mit einer Partition der Eins.

Definition 2.17 *Eine* Partition der Eins *ist eine Menge von Funktionen $P \subset \mathcal{F}(M)$ mit Folgenden Eigenschaften:*

1. $0 \leq f \leq 1$ *für alle* $f \in P$
2. $\sum_{f \in P} f \equiv 1$
3. $\{\operatorname{supp} f \mid f \in P\}$ *ist lokal endlich (d. h. für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung, die nur mit endlich vielen Elementen aus der Menge nichtleeren Schnitt hat).*

Normalerweise reicht es natürlich nicht, das eine Partition der Eins existiert, sondern man benötigt welche, die zu einer beliebigen *offenen Überdeckung*[7] passen. Auf Mannigfaltigkeiten geht das zum Glück fast ohne Einschränkung immer, wie der folgende Satz und das Korollar zeigen:

Satz 2.18 *Ist M eine Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis, so hat jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung*[8]

Beweis. Wir können annehmen, das wir eine abzählbare Basis $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ unserer Topologie haben deren Elemente kompakten[9] Abschluss besitzen. Man setzt jetzt $V_k = \bigcup_{i=0}^{i_k} U_i$, mit $i_0 = 0$ und i_k als kleinstem Index größer als i_{k-1}, für den $\bar{V}_{k-1} \subset \bigcup_{i=0}^{i_k} U_i$ ist. Offenbar ist $M \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$, $\bar{V}_k \subset V_{k+1}$ und $\bar{V}_k$ kompakt für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist nun $\{W_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von M. Wählt man jetzt Ω_k als endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung

$$\{W_\alpha \cap (V_{k+1} \setminus \bar{V}_{k-2})\}$$

von $\bar{V}_k \setminus V_{k-1}$ (wir nehmen V_k mit negativem Index als $\emptyset$ an), so ist $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$ lokal endliche Verfeinerung von $\{W_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$. □

Korollar 2.19 *Zu jeder offenen Überdeckung D einer Mannigfaltigkeit M (mit abzählbarer Basis) existiert eine untergeordnete Partition der Eins, also eine, für die für alle Elemente f gilt* $\operatorname{supp} f \subset U \in D$.

Beweis. Der vorige Satz liefert eine lokal endliche Verfeinerung der Überdeckung D, auf deren Elementen man dann ähnlich wie oben abfallende Funktionen konstruiert. □

[7] Eine offene Überdeckung einer Menge X ist einfach eine Menge offener Mengen, deren Vereinigung X enthält.

[8] Eine Verfeinerung einer Überdeckung ist eine neue Überdeckung deren Elemente Teilmengen der Elemente der Alten sind.

[9] Eine Menge X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat (es gibt also endlich viele Elemente in der Überdeckung, die zusammen schon selbst überdecken).