Bemerkung. Ist M Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ Karte mit $p \in U$, so nennt man U auch *Koordinatenumgebung* und ϕ auch *Koordinatensystem* in p.

Beispiel 2.4 *Seien $R > r > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,*

$$f(\alpha, \beta) = (R + r\cos\beta)(\cos\alpha, \sin\alpha, 0) + r\sin\beta(0, 0, 1).$$

Wir setzen $T^2 := f(\mathbb{R}^2)$ und für jedes $p \in T^2$, $p = f(x, y)$ setzen wir $\phi^{-1}_{(x,y)} : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \to f((x-\pi, x+\pi) \times (y-\pi, y+\pi))$, $\phi^{-1}_{(x,)}(\alpha, \beta) = f(x+\alpha, y+\beta)$. Dann ist $\{\phi_p \,|\, p \in T^2\}$ Atlas von T^2 und ϕ_p ist Koordinatensystem in p.

Bemerkung. Wir werden im folgenden nur noch Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Basis betrachten.
Bemerkung.

- Ist M n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $U \in M$ offen, so wird U mit allen Karten von M, deren Definitionsbereiche ganz in U liegen selbst zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. U heißt dann *offene Untermannigfaltigkeit* von M.

- Sind M und N m- bzw. N-dimensionale Mannigfaltigkeiten, so wird $M \times N$ auf kanonische Weise selbst zu einer $(m+n)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.[4]

Beispiel 2.5

- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *gilt auch als Mannigfaltigkeiten gelesen.*

- $S^1 \times S^1$ *ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

2.3 Differenzierbarkeit

Wir werden jetzt den Begriff der Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Wie zu erwarten, geschieht das durch "liften" der Begriffe vom $\mathbb{R}^n$.

[4] Man wählt auf $M \times N$ die Produkttopologie. Sind dann $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und $\eta : V \to \mathbb{R}^n$ Karten auf M bzw. N, so ist $U \times V$ offen in $M \times N$ und $(\phi, \eta) : U \times V :\to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ wird zu einer Karte auf $M \times N$.

Definition 2.11 *Seien M und N m- bzw. N-dimensionale Mannigfaltigkeiten. $f : M/toN$ heißt* differenzierbar*, falls für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ auf M und $\eta : V \to \mathbb{R}^n$ auf N*

$$\eta \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$$

differenzierbar ist[5]*.*

Bemerkung.

- Differenzierbarkeit in einem Punkt definiert man entsprechend.
- Es genügt die Differenzierbarkeitfür hinreichend viele Karten zu prüfen, so dass M und $f(M)$ abgedeckt sind.
- Differenzierbarkeit auf offenen Teilmengen folgt auch unmittelbar, da diese offene Untermannigfaltigkeiten sind.
- Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so kann man als Karte auf $\mathbb{R}$ die Identität wählen. D. h. f ist differenzierbar, falls es für jedes $p \in M$ ein Koordinatensystem $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Definition 2.12 *Ein* Diffeomorphismus *ist eine differenzierbare Abbildung mit differenzierbarer Umkehrabbildung.*

Beispiel 2.6

- *Jede Karte ist ein Diffeomorphismus.*
- $\Phi : S^1 \times S^1 \to T^2$, $(x, y) \mapsto f(\arg x, \arg y)$ *mit f wie im Beispiel 2.4 ist ein Diffeomorphismus. Hier lesen wir S^1 als Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.*

Die differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit werden gleich noch eine wichtige Rolle spielen, da wir sie zur Definition von Tangentialvektoren einsetzen werden.

Definition 2.13 *$\mathcal{F}(M)$ bezeichne den (kommutativen) Ring*[6] *(mit Eins) der differenzierbaren Funktionen auf M.*

[5] Auch hier gelte die Bedingung wieder als trivial erfüllt, falls $V \cap f(M) = \emptyset$ ist

[6] Ein Ring ist grob gesagt ein Körper, bei dem es keine multiplikativen Inversen geben muss: Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot : R \times R \to R$ heißt *Ring*, falls gilt

2.4 Der Tangentialraum

Ist $g : V \subset \mathbb{R}^m \to W \supset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so kann man das totale Differential von g $D_p g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $q \in V$ betrachten.

$$D_q g(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}|_q$$

ist dann die Richtungsableitung von g in Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Aber so wenig wie v in V liegen muss, muss die Richtungsableitung $D_q g(v) = \partial_v g|_q$ in W sein. Beide Vektoren "leben" in anderen Räumen, als die Funktion g. Diese Räume werden wir jetzt auch für jeden Punkt einer Mannigfaltigkeit konstruieren. Zunächst bemerken wir, das man für Funktionen $g : V \to \mathbb{R}$ die Richtungsableitung $\partial_v g|_q$ nicht nur als Abbildung $v \mapsto \partial_v g|_q$ sondern genauso gut auch als $g \mapsto \partial_v g|_q$ verstehen kann: Im Punkt q operiert v als Richtungsableitung auf der Menge aller differenzierbaren Funktionen $v : \mathcal{F}(V) \to \mathbb{R}$. Haben wir eine Mannigfaltigkeit M und $p \in M$ mit Koordinatensystem $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. so können wir $g = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ betrachten und

$$\partial_i := f|_p \frac{\partial f}{\partial \phi_i}|_p := \frac{f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}|_q$$

definieren diese partiellen Ableitungen von f hängen allerdings von der Karte ϕ ab. Nichtsdestotrotz können wir jetzt auch für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_v f|_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i f|_p.$$

erklären. Auch hier können wir jetzt die Rollen vertauschen und v als Funktion auf $F(M)$ betrachten. Nach wie vor ist aber unsere Beschreibung dieser Tangentialvektoren abhängig von der gewählten Karte. Wollen wir die Richtungsableitung unabhängig von einer gewählten Karte erklären müssen wir ihre Eigenschaften axiomatisch fassen:

Definition 2.14 *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein* Tangentialvektor *v an M in p ist eine Abbildung $v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $(R, +)$ ist abelsche Gruppe
- $(R, \cdot)$ ist Halbgruppe
- für alle $a, b, c \in R$ gilt $a(b + c) = ab + ac$ und $(b + c)a = ba + ca$ (Distributivgesetz)

Ist $(R, \cdot)$ kommutative Halbgruppe, so nennt man den Ring $(R, +, \cdot)$ kommutativ, ist $(R, +, \cdot)$ Halbgruppe mit 1 so heißt $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit 1.

1. *v ist $\mathbb{R}$-linear: Für alle $\lambda, \mu \in R$ und $f, g \in \mathcal{F}(M)$ gilt $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$.*

2. *v erfüllt die Leibnizregel: Für alle $f, g \in \mathcal{F}(M)$ gilt: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.*

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p heißt Tangentialraum *an M in p und wird mit T_pM bezeichnet. Man überprüft leicht, das T_pM ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist (ein Untervektorraum der Raumes aller Funktionen auf $/F(M)$).*

Das Folgende ist Lemma, Definition und Beispiel in einem:

Lemma 2.15 *Die partiellen Ableitungen bezüglich einer Karte heißen* Gauß-vektoren *und sind Tangentialvektoren.*

Beweis. Sei M Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und ϕ Koordinatensystem in p. Wir müssen zeigen, das die ∂_i $\mathbb{R}$-linear und Leibniz sind. Es ist aber für $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $q = \phi(p)$:

$$\partial(\lambda f + \mu g)|_p = \frac{\partial(\lambda f + \mu g) \circ \phi}{\partial x_i}|_q = \lambda \frac{\partial \lambda f \circ \phi}{\partial x_i}|_q + \mu \frac{\partial g \circ \phi}{\partial x_i}|_q = \lambda \partial_i f|_p + \mu \partial_i g|_p$$

und

$$\begin{aligned} \partial_i(fg)|_p &= \frac{\partial(fg) \circ \phi}{\partial x_i}|_q = \frac{\partial(\lambda f) \circ \phi}{\partial x_i}|_q g \circ \phi^{-1}(q) + f \circ \phi^{-1}(q) \frac{\partial(\lambda g) \circ \phi}{\partial x_i}|_q \\ &= \partial_i f|_p g(p) + f(p) \partial_i g|_p. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Ist eine Funktion konstant $f \equiv c$, so ist für alle $v \in T_pM$ $v(f) = 0$, denn für $g \equiv 1$ gilt $v(g) = v(g^2) = v(g)g(p) + g(p)v(g) = 2v(g)$, also $v(g) = 0$ und mit $f = cg$ folgt $v(f) = v(cg) = cv(g) = 0$.

Da T_pM ein Vektorraum ist sind also auch die Richtungsableitungen bezüglich einer Karte Tangentialvektoren und wir zeigen jetzt, dass das in der Tat alle sind.

Satz 2.16 *Ist M n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so ist T_pM n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist ϕ Koordinatensystem in p, so bilden die Gaußvektoren (die partiellen Ableitungen bzgl. ϕ) eine Basis, die sog.* Gauß-basis *von T_pM.*

Beweis. Sei ϕ Koordinatensystem in p. Wir werden lokal in diesem Koordinatensystem argumentieren und danach kurz betrachten, warum das erlaubt ist.

Insbesondere betrachten wir die Komponentenfunktionen $\phi = (\phi_i, \dots, \phi_n)$ als Funktionen auf M (die wir mit Tangentialvektoren ableiten können) obwohl sie zunächst nur auf einer offenen Teilmenge definiert sind.

Zunächst zeigen wir, das die ∂_i linear unabhängig sind: Sei $0 = \sum_i \lambda_i \partial_i$ eine Linearkombination der Null. Dann gilt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$0 = \left(\sum_i \lambda_i \partial_i \right) (\phi_j) = \sum_i \lambda_i \frac{\partial \phi_j \circ \phi^{-1}}{\partial x_i} |_{\phi p} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} |_{\phi p} = \lambda_j.$$

Also sind alle $\lambda_j = 0$ und die Linearkombination war trivial. Damit ist gezeigt, das die ∂_i linear unabhängig sind. $\square$