# TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

**Zentrum Mathematik**

PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. HERMANN VOGEL

**Differentialgeometrie: Grundlagen (SS 2009)**

**— Aufgabenblatt 5 (24. Juni 2009) —**

## — *Präsenzaufgaben* —

**P 18.** Sei $f : I \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \gamma(u) + v \cdot \gamma'(u)$ die Tangentenfläche einer regulären Raumkurve $\gamma(u)$ mit $\| \gamma'(u) \| = 1$ und der Krümmung $\kappa(u) > 0$ und der Torsion $\tau(u) \neq 0$ bezogen auf den Frenetrahmen von $\gamma$.

1. Zeigen Sie, dass $f$ eine ***Torse*** ist, d.h. die Gaußkrümmung $K$ in allen Punkten verschwindet.
2. Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen sowie die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen von $f$.
3. Geben Sie eine Parametrisierung von $f$ an, deren Parameterlinien Krümmungslinien sind.

**P 19.** Gegeben sei eine reguläre Fläche $f(x, y)$ mit den Fundamentalgrößen $g_{ij}$ und $h_{ij}$ der ersten und zweiten Grundform. Zeigen Sie:

$$v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \text{ ist Hauptkrümmungsrichtung} \quad \Leftrightarrow \quad det \begin{pmatrix} (v_2)^2 & -v_1 v_2 & (v_1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Was gilt im Fall $h_{ij} = \lambda g_{ij}, \lambda \in \mathbb{R}$ ?

**P 20.** Zeigen Sie, dass für die Fläche $f(u, v) = \begin{pmatrix} u - u^3/3 + uv^2 \\ v - v^3/3 + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$ die Mittlere Krümmung $H = 0$ ist und bestimmen Sie ihre Krümmungs- und Asymptotenlinien. $f$ nennt man ***Ennepersche Minimalfläche***. Zeigen Sie ferner: Die Punkte, für die die Gauß-Krümmung $K$ konstant ist, bilden im Parametergebiet konzentrische Kreise.

**P 21.** Zeigen Sie:

1. Eine Kurve $\gamma$ auf einer Fläche ist genau dann gleichzeitig Geodätische und Asymptotenlinie, wenn $\gamma$ eine Gerade ist.
2. Eine Kurve $\gamma$ auf einer Fläche, die gleichzeitig Krümmungslinie und Geodätische ist, ist eine ebene Kurve.

## — *Hausaufgaben* —

**H 22.** Zeigen Sie: Die Rotationsfläche (um die $z$-Achse) mit der Traktrix $\gamma(u) = (1/\cosh(u), 0, u - \tanh(u))^T$ als Meridiankurve hat konstante negative Gauß-Krümmung. Diese Fläche nennt man daher ***Pseudosphäre***.

***Hinweis:*** Ermitteln Sie die Fundamentalgrößen $g_{ij}, h_{ij}$ der 1. und 2. Grundform einer allgemeinen Drehfläche mit regulärer Meridiankurve $\gamma(u) = (r(u), 0, z(u))^T$ mit $r(u) > 0$ sowie deren Hauptkrümmungen $k_1, k_2$.

**H 23.** Ermitteln Sie alle Nabelpunkte des Paraboloids $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (au, bv, \frac{u^2+v^2}{2})^T$ o.E. $a \geq b > 0$.