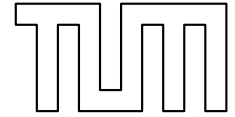




TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik



PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. HERMANN VOGEL

Differentialgeometrie: Grundlagen (SS 2009)

— Aufgabenblatt 5 (24. Juni 2009) —

— Präsenzaufgaben —

P 18. Sei $f : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \gamma(u) + v \cdot \gamma'(u)$ die Tangentenfläche einer regulären Raumkurve $\gamma(u)$ mit $\|\gamma'(u)\| = 1$ und der Krümmung $\kappa(u) > 0$ und der Torsion $\tau(u) \neq 0$ bezogen auf den Frenetrahmen von γ .

1. Zeigen Sie, dass f eine **Torse** ist, d.h. die Gaußkrümmung K in allen Punkten verschwindet.
2. Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen sowie die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen von f .
3. Geben Sie eine Parametrisierung von f an, deren Parameterlinien Krümmungslinien sind.

P 19. Gegeben sei eine reguläre Fläche $f(x, y)$ mit den Fundamentalgrößen g_{ij} und h_{ij} der ersten und zweiten Grundform. Zeigen Sie:

$$v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ ist Hauptkrümmungsrichtung} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} (v_2)^2 & -v_1 v_2 & (v_1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Was gilt im Fall $h_{ij} = \lambda g_{ij}, \lambda \in \mathbb{R}$?

P 20. Zeigen Sie, dass für die Fläche $f(u, v) = \begin{pmatrix} u - u^3/3 + uv^2 \\ v - v^3/3 + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ die Mittlere Krümmung

$H = 0$ ist und bestimmen Sie ihre Krümmungs- und Asymptotenlinien. f nennt man **Ennepersche Minimalfläche**. Zeigen Sie ferner: Die Punkte, für die die Gauß-Krümmung K konstant ist, bilden im Parametergebiet konzentrische Kreise.

P 21. Zeigen Sie:

1. Eine Kurve γ auf einer Fläche ist genau dann gleichzeitig Geodätische und Asymptotenlinie, wenn γ eine Gerade ist.
2. Eine Kurve γ auf einer Fläche, die gleichzeitig Krümmungslinie und Geodätische ist, ist eine ebene Kurve.

— Hausaufgaben —

H 22. Zeigen Sie: Die Rotationsfläche (um die z -Achse) mit der Traktrix $\gamma(u) = (1/\cosh(u), 0, u - \tanh(u))^T$ als Meridiankurve hat konstante negative Gauß-Krümmung. Diese Fläche nennt man daher **Pseudosphäre**.

Hinweis: Ermitteln Sie die Fundamentalgrößen g_{ij}, h_{ij} der 1. und 2. Grundform einer allgemeinen Drehfläche mit regulärer Meridiankurve $\gamma(u) = (r(u), 0, z(u))^T$ mit $r(u) > 0$ sowie deren Hauptkrümmungen k_1, k_2 .

H 23. Ermitteln Sie alle Nabelpunkte des Paraboloids $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (au, bv, \frac{u^2+v^2}{2})^T$ o.E. $a \geq b > 0$.