TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. HERMANN VOGEL

Differentialgeometrie: Grundlagen (SS 2009)
— Aufgabenblatt 4 (10. Juni 2009) —

— Präsenzaufgaben —

P 14. Gegeben sei die Fläche $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto f(x, y) = (x\,cos\,y\,,\; x\,sin\,y\,,\; y - x)$.

1. Beschreiben Sie die Gestalt der Fläche an Hand ihrer Parameterlinien.
2. Zeigen Sie, dass f regulär ist, und bestimmen Sie die erste Fundamentalform von f. Betrachten Sie auch $f_x \times f_y$.
3. Welche y-Linie $y \mapsto f(x_0, y)$ schneidet alle x-Linien $x \mapsto f(x, y_0)$ unter $135°$?
4. Bestimmen Sie eine Flächenkurve $\gamma : I \to f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, welche die x-Linien von f orthogonal schneidet.
5. Zeigen Sie, dass $f(U)$ mit $U =]0, 2[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$ ein eingebettetes Flächenstück ist und geben Sie den Flächeninhalt von $f(U)$ an.

P 15. Die Tangenten einer regulären Raumkurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, s \mapsto \gamma(s)$ (o.E. s Bogenlänge von γ) bilden die Tangentenfläche $\quad f : I \times \mathbb{R}, (s, t) \mapsto f(s, t) = \gamma(s) + t \cdot \gamma'(s) \quad$ von γ. Sei ferner die Krümmung von γ bezüglich des Frenet-Rahmens $\kappa(s) \neq 0 \;\; \forall\; s \in I$.

1. Zeigen Sie, dass $f \setminus \gamma$ regulär ist und die Tangentenebenen längs der Erzeugenden (t-Linien) zusammenfallen.
2. Berechnen Sie die erste Fundamentalform von γ.
3. Zeigen Sie, dass f in die Ebene abwickelbar ist, d.h. dass f isometrisch zu einer ebenen Fläche $\tilde{f} \subset \mathbb{R}^2$ ist.

— Hausaufgaben —

H 16. Gegeben sei ein Drehparaboloid $f\;:\;\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3\,,\,(u, v) \;\mapsto\; (u\,cos\,v\,,\,u\,sin\,v\,,\,u^2)$ um die z-Achse sowie die ebene parametrisierte Fläche $\tilde{f}\,:\;\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3\;,\;(u, v) \;\mapsto\; (h(u), v, 0)$ mit einer Funktion $h\,:\;\mathbb{R} \to \mathbb{R}\;,\;u \mapsto h(u)$.

1. Zeigen Sie, dass f eine reguläre eingebettete Fläche ist, und berechnen Sie die erste Fundamentalform von f.
2. Bestimmen Sie die Schnittkurve von f mit der Ebene $x + z = 2$ des $\mathbb{R}^3$ und den Flächeninhalt von f unterhalb dieser Ebene bis auf Quadratur.
3. Bestimmen Sie die Funktion h so, dass f und $\tilde{f}$ zueinander **a)** winkeltreu **b)** flächentreu sind.
   Kann es eine isometrische Abbildung von f in die Ebene geben ?

H 17. Stetige Verbiegung des Katenoids in das Helikoid
Gegeben seien das Helikoid $h\,:\;\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\;,\;(u, v) \mapsto h(u, v) = (sinh(u)cos(v)\;,\;sinh(u)sin(v)\;,\;v)$
und das Katenoid $k\,:\;\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\;,\;(u, v) \mapsto k(u, v) = (-cosh(u)sin(v)\;,\;cosh(u)cos(v)\;,\;u)$.

Zeigen Sie, dass für $\delta \in \mathbb{R}$ alle Flächen der Flächenschar: $f_\delta(u, v) := cos(\delta) \cdot k(u, v) + sin(\delta) \cdot h(u, v)$ dieselbe Gaußabbildung haben und zueinander isometrisch sind.

Hinweis: Beachten Sie: $h_u(u, v) = -k_v(u, v)$ und $h_v(u, v) = k_u(u, v)$.