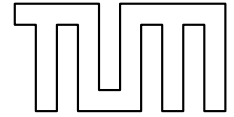




TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Zentrum Mathematik



PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. HERMANN VOGEL

Differentialgeometrie: Grundlagen (SS 2009)

— Aufgabenblatt 3 (27. Mai 2009) —

— Präsenzaufgaben —

**P 10.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve und  $F : I \rightarrow SO(3)$  ein Rahmen von  $\gamma$  mit Ableitungsmatrix  $A$ . Sei  $B : I \rightarrow SO(3)$  differenzierbar und für jedes  $t \in I$  eine Drehung um  $(1, 0, 0)$ .  $\tilde{F} = FB$  ist dann ein neuer Rahmen für  $\gamma$ . Bestimme die Ableitungsmatrix  $\tilde{A}$  von  $\tilde{F}$ . Eine solche Änderung von  $F$  zu  $FB$  heißt auch Umeichung oder Eichtransformation von  $F$ .

**P 11.** Wie hängen die Krümmungsgrößen  $\kappa = \kappa_1$  und  $\tau$  eines Frenet-Rahmens und die komplexe Krümmung  $\kappa_1 + i\kappa_2$  eines parallelen Rahmens zur gleichen Kurve zusammen?

**P 12.** Eine reguläre Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \gamma(t)$  heißt *Böschungslinie*, wenn es  $v \in \mathbb{R}^3, \|v\| = 1$  und  $\theta \in [0, \pi]$  gibt, sodass  $\langle v, \gamma'(t) \rangle = \cos \theta$  für alle  $t \in I$ .

Zeigen Sie für eine reguläre Kurve  $\gamma$  mit der Krümmung  $\kappa(t) = \kappa_1(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  und der Torsion  $\tau$  bezüglich des Frenet-Rahmens  $(T \ N \ B)$ :

$$\gamma \text{ ist Böschungslinie} \iff \frac{\tau}{\kappa} = \text{const} \iff D := \tau T + \kappa B \text{ hat feste Richtung.}$$

Wie erhält man aus  $\frac{\tau}{\kappa}$  und  $D$  den Böschungswinkel  $\theta$  und die Böschungsrichtung  $v$ ?

— Hausaufgaben —

**H 13.** Gegeben sei die Raumkurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, u \mapsto \gamma(u) = (u, 4 - 3u^2, 6u^3)^T$ .

1. Berechnen Sie bezüglich des Frenet-Rahmens  $(T \ N \ B)$  die Krümmung  $\kappa(u)$  und die Torsion  $\tau(u)$  von  $\gamma$ .
2. Zeigen Sie, dass  $\gamma$  eine Böschungslinie ist, und geben Sie die Böschungsrichtung  $v$  und den Böschungswinkel  $\theta$  an.