TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. HERMANN VOGEL

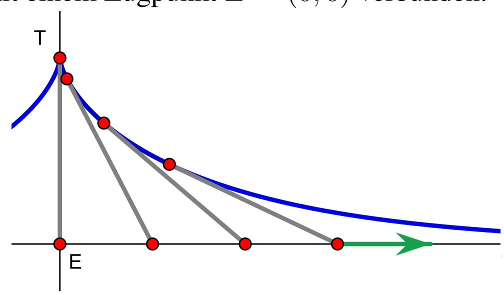
Differentialgeometrie: Grundlagen (SS 2009)
— Aufgabenblatt 2 (13. Mai 2009) —

— *Präsenzaufgaben* —

P 6. Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t)$ eine reguläre Kurve in allgemeiner Parametrisierung und $\kappa(t)$ die Krümmung von γ im Punkt $\gamma(t)$. Zeigen Sie:

1. $\kappa \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(I)$ ist in einer Geraden enthalten.
2. $\kappa(t) = \dfrac{det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{\|\dot\gamma(t)\|^3}$

P 7. Im $\mathbb{R}^2$ wird ein Punkt $T = (0,1)$ durch eine straff gespannte Kette mit einem Zugpunkt $E = (0,0)$ verbunden. Welche Kurve beschreibt T, wenn man E in x-Richtung bewegt? Diese Kurve heißt Traktrix.



1. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Traktrix.
2. Bestimmen Sie die Evolute der Traktrix.
3. Zeigen Sie, dass die Traktrix eine Evolvente der Kettenlinie aus Aufgabe **P 1** ist.

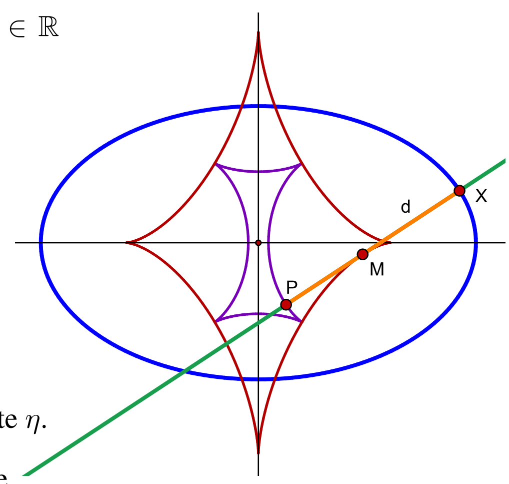
P 8. Seien $\gamma(I)$ eine reguläre Kurve und $\eta(I)$ ihre Evolute. Für festes $d \in \mathbb{R}$ heißt

$$\beta : \; I \to \mathbb{R}^2 , \; t \mapsto \beta(t) = \gamma(t) + d \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma'(t)$$

eine Parallelkurve von γ. Zeigen Sie allgemein:

1. η ist tangential an die Normalen von γ.
2. $\dot\eta(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot\kappa(t_0) = 0$.
3. Die Parallelkurven von γ sind Evolventen der Evolute η.
4. Die singulären Punkte der Parallelkurven liegen auf der Evolute η.

Veranschaulichen Sie sich diese Sachverhalte am Beispiel der Ellipse.



— *Hausaufgaben* —

H 9. Bestimmen Sie:

1. die Evolute der Logarithmischen Spirale.
2. die Evolventen des Einheitskreises.
   Skizzieren Sie speziell die Evolvente durch den Punkt $(1,0)$ mit Hilfe ihrer Krümmungskreise.