

PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. HERMANN VOGEL

Differentialgeometrie: Grundlagen (SS 2009)

— Aufgabenblatt 1 (29. April 2009) —

— Präsenzaufgaben —

P 1. Kettenlinie

Gegeben sei die parametrisierte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, \cosh(t))$. Zeigen Sie:

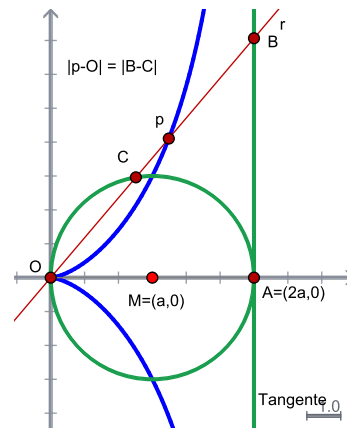
1. Die Kurve $\gamma(\mathbb{R})$ stimmt mit dem Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cosh(x)$ überein (Kettenlinie).
2. Der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t_0)$ gibt die Richtung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(t_0, f(t_0))$ an.
3. Die Länge der Kette zwischen den Punkten $\gamma(-t_0)$ und $\gamma(t_0)$ ist $2 \sinh(t_0)$.

Zusatz: Begründen Sie, dass man jede reguläre Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ lokal um jeden regulären Punkt $\gamma(t_0)$ als Graph einer Funktion deuten kann.

P 2. Kissoide des Diocles

Betrachte den Kreis vom Radius a durch $O = (0, 0)$ und $(2a, 0)$ und einen Strahl r durch O . Der Strahl schneide den Kreis in C und seine Tangente $(2a, y)$ in B . p bezeichne den Punkt auf r , der durch $|p| = |B - C|$ gegeben ist. Variiert man den Strahl, so beschreibt p eine Kurve. Sie heißt die Kissoide des Diocles.

Bestimme eine Parametrisierung von ihr und zeige, daß O der einzige singuläre Punkt von ihr ist.



P 3. Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär. Dann gilt

$$\|\dot{\gamma}(t_0)\| = \min\{\|\dot{\gamma}(t)\| \mid t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dot{\gamma}(t_0) \perp \gamma(t_0).$$

P 4. Neilsche Parabel

Berechnen Sie für die Neilsche Parabel $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t^3/3, t^2/2)$ die Bogenlänge von $\gamma(0)$ bis $\gamma(t)$ und geben Sie für den rechten Ast $\gamma(\mathbb{R}^+)$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge s an.

— Hausaufgaben —

H 5. Zyklode

Bestimmen Sie die Länge des Kurvenbogens der Zyklode $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ zwischen zwei benachbarten singulären Stellen.

— Informationen —

Die Hausaufgaben sind derart zu bearbeiten, dass Sie diese in der folgenden Übung vorrechnen können.