Im folgenden werden wir uns auf konforme Parametrisierungen beschränken. Das dies keine echte Einschränkung ist zeigt der (schwer zu beweisende und deshalb hier nur zitierte) Satz

Satz 4.32 (Korn, Lichtenstein) *Jede immersierte Fläche* $f : U \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *kann lokal konform umparametrisiert werden.*

Wir können im folgenden also ohne Einschränkung annehmen, das f konform parametrisiert ist, das also $\langle f_x, f_x \rangle = \langle f_y, f_y \rangle = \lambda^2 \neq 0$ und $\langle f_x, f_y \rangle = 0$ gilt.

Lemma 4.33 *Sei* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *konform.* f *ist genau dann Minimalfläche, wenn* $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$ *gilt.*

Beweis. Wir zeigen, das Δf bis auf einen Faktor genau der sog. mitlere Krümmungsvektor HN ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle f_{xx} + f_{yy}, f_x \rangle &= \langle f_{xx}, f_x \rangle + \langle f_{yy}, f_x \rangle \\ &= \tfrac{1}{2} \left(\langle f_x, f_x \rangle_x - \langle f_{xy}, f_y \rangle_x \right) = 0 \end{aligned}$$

da f konform ist.$\langle f_{xx} + f_{yy}, f_y \rangle = 0$ folgt genauso. Also ist $\Delta f \parallel N$ und

$$\langle f_{xx} + f_{yy}, N \rangle = \langle f_{xx}, N \rangle + \langle f_{yy}, N \rangle = h_{11} + h_{22}.$$

Da die erste Fundamentalform λ^2-Vielfaches der Idendität ist, ist die Spur des Weingartenoperators $2H = a + c = \lambda^{-2}(h_{11} + h_{22})$. Damit ist

$$\Delta f = 2\lambda^2 HN.$$

□

Bemerkung. Funktionen für die $\Delta h \equiv 0$ gilt heißen *harmonisch.*

4.9 etwas Funktionentheorie

Definition 4.34 *Sei G offenes Gebiet in $\mathbb{C}$. $f : G \to \mathbb{C}$ heißt* holomorph *in* $z_0 \in G$ *falls* $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_{\cdot}0)$ *existiert.*

Beispiele für auf ihrem gesamten Definitionsbereich holomorphen Funktionen sind Polynome, Exponentialfunktion, sin und cos.

Identifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, so gilt für $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

- Ist f holomorph, so auch reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- Sind u und v stetig partiell differenzierbar, mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ so ist f holomorph.

Weiter definiert man die Wirtinger-Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Damit gilt für $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ unter Benutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = 2\frac{\partial}{\partial z}u$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) = 0$$

Und für beliebiges f

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f = \frac{1}{4}\Delta f.$$

Eine Funktion ist also genau dann hlomorph, wenn ihre "Ableitung nach z-quer" verschwindet.

Definition 4.35 $f : G \to \mathbb{C}$ *heißt* meromorph *falls f holomorph ist bis auf isolierte Singularitäten, die alle Pole sind.*

Insbesondere ist dann in einer Umgebung von einer solchen Singularität z_0 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}$ und holomorphes g.

Satz 4.36 *Ist G einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so existiert eine holomorphe Stammfunktion F mit $F' = f$.*

Beweis. Gesucht: $F = U + iV$ mit $F' = U_x - iU_y = u + iv = f$. Also muss $U_x = u$ und $-U_y = v$ sein. Das geht aber, da die Integrabilitätsbedingung wegen $u_y = -v_x$ gilt. Gleiches gilt für $V_x = v$ und $V_y = u$. Offenbar erfüllt F dann die Cauchy-Riemann-Gleichungen. □

Zurück zu den Minimalflächen: Sei jetzt$f : U \to \mathbb{R}^3$. Setze $\phi := \frac{\partial}{\partial z}f : U \to \mathbb{C}^3$. Dann gilt

- $\sum_k^3 |\phi_k|^2 = \sum_k \frac{1}{4}(f_{kx}^2 + f_{ky}^2) = \frac{1}{4}\left(\|\frac{\partial}{\partial x}f\|^2 + \|\frac{\partial}{\partial y}f\|^2\right)$

- $\sum_k \phi_k^2 = \sum_k \frac{1}{4}\left((\frac{\partial}{\partial x}f_k)^2 - 2i\frac{\partial}{\partial x}f_k\frac{\partial}{\partial y}f_k - (\frac{\partial}{\partial y}f_k)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\frac{\partial}{\partial x}f\|^2 - \|\frac{\partial}{\partial y}f\|^2\right) - \frac{1}{2}i\left\langle \frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f\right\rangle$

Ist $\sum_k \phi_k^2 = 0$, so ist f konform, ist $\sum_k |\phi|^2 > 0$, so auch Immersion. Weiter war ja f minimal $\Leftrightarrow \Delta f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi = 0 \Leftrightarrow \phi$ ist holomorph.

Man kann f aus ϕ zurückgewinnen: Sei $\phi : U \to \mathbb{C}^3$ holomorph, mit $\sum_k \phi_k^2 = 0$ und $\sum_k |\phi|^2 > 0$, U einfach zusammenhängend. Dann existiert eine Stammfunktion F mit $F' = \phi$ und wegen $\frac{\partial}{\partial z} F = 2 \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{Re} F$ ist $f = 2\mathrm{Re}F$ dann konform immersierte Minimalfläche. Wir haben also die Konstruktion von Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$ auf die Konstruktion eines holomorphen $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ mit $\sum_k \phi_k^2 = 0$ und $\sum_k |\phi|^2 > 0$ zurückgespielt.

Satz 4.37 (Weierstraßdarstellung) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $g : U \to \mathbb{C}$ meromorph mit folgenden Eigenschaften:*

- *Jede Nullstelle von h sei ein Pol von g.*
- *Ist p Pol von g der Ordnung n, so ist p Nullstelle von h der Ordnung $2n$.*

Seien weiter

- $\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)h$
- $\phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)h$
- $\phi_3 = gh.$

Dann sind die ϕ_k holomorph. Nun sei $F : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Stammfunktion von $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Dann ist $f = 2ReF$ eine konform parametrisierte immersierte Minimalfläche.

Beweis. Es gilt:

- Die ϕ_k sind offenbar holomorph.
- ϕ erfüllt $\sum_k |\phi|^2 > 0$: $\sum_k |\phi|^2 = \frac{1}{4}|h|^2(|1 - g^2|^2 + |1 + g^2|^2 + 4|g|^2) > 0.$
- ϕ erfüllt $\sum_k \phi_k^2 = 0$: $\sum_k \phi_k^2 = \frac{1}{4}h^2(1 - 2g^2 + g^4 - 1 - 2g^2 - g^4 + 4g^2) = 0.$

Also ist $f = 2\mathrm{Re} \int \phi$ konforme minimale Immersion. $\square$

Bemerkung. In gewissem Sine kann man jede Minimalfläche so über $\mathbb{C}$ oder D^2 darstellen.