Beispiel 4.10 *Die Geodätischen auf S^2 sind Großkreisbögen, aber schon die Geodätischen auf dem Rotationstorus sind nicht mehr geschlossen darstellbar.*

Lemma 4.29 (Geodätische als Geradeste) *γ ist Prägeodätische auf f genau dann wenn γ' parallel längs γ in Tf ist.*

Beweis. γ ist Prägeodätische $\Leftrightarrow \kappa_g = 0 \Leftrightarrow \gamma'' \parallel N \Leftrightarrow \gamma'$ ist parallel in Tf. □

Lemma 4.30 (Geodätische als (lokal) Kürzeste) *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ bogenlängenparametrisierte Kurve auf $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Kürzeste unter allen Kurven auf f mit gleichen Endpunkten. Dann ist γ Geodätische.*

Beweis. Beweis durch Variation. Sei γ bogenlängenparametrisierte Kurve auf f. Zunächst bestimmen wir die Variationsformel für die Bogenlänge. Ist γ_t eine Variation von $\gamma = \gamma_0$, dann gilt für die Länge $L_{a,b}(\gamma_t) = L(\gamma_t)$:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} L(\gamma_t)|_{t=0} &= \tfrac{d}{dt} \int_a^b \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle} = \int_a^b \frac{\langle \dot\gamma', \gamma' \rangle}{\sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle}} \\ &= \int_a^b \langle \dot\gamma', \gamma' \rangle = \langle \dot\gamma, \gamma' \rangle |_a^b - \int_a^b \langle \dot\gamma, \gamma'' \rangle . \end{aligned}$$

Ist γ jetzt eine Kürzeste, so muß für alle Variationen von γ durch Kurven auf f mit festen Endpunkten $\frac{d}{dt} L(\gamma_t)|_{t=0} = 0$ gelten. Wir haben also

$$0 = \langle \dot\gamma, \gamma' \rangle |_a^b - \int_a^b \langle \dot\gamma, \gamma'' \rangle = - \int_a^b \langle \dot\gamma, \kappa_g B + \kappa_N N \rangle = - \int_a^b \kappa_g \langle \dot\gamma, B \rangle$$

denn für Variationen mit festen Endpunkten gilt $\dot\gamma(a) = \dot\gamma(b) = 0$ und da die Variation durch Kurven auf f war ist $\dot\gamma$ tangential an f.

Angenommen κ_g ist sagen wir bei $s_0 \in (a,b)$ ungleich 0. O. E. nehmen wir an $\kappa_g(s_0) > 0$. Dann existiert ein $I = (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon) \subset [a,b]$ mit $\kappa_g > 0$ auf I. Dann gilt aber für eine nicht verschwindende Variation γ_t mit $\dot\gamma_t = 0$ auf $[a,b] \setminus I$ und $\langle \dot\gamma, B \rangle \geq 0$ auf I, dass $\int_a^b \kappa_g \langle \dot\gamma, B \rangle > 0$ was ein Widerspruch ist. □

Bemerkung.

- Eine Kürzeste muß nicht immer existieren: Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \geq 0\}$ gibt es keine kürzeste Verbindung zwischen $(1,-1)$ und $(1,1)$.
- Eine Kürzeste ist nicht immer eindeutig: Auf S^2 ist jeder Großkreisbogen zwischen zwei Antipoden Kürzeste.
- Der Satz ist nicht umkehrbar: Zwischen zwei Nicht-Antipoden auf S^2 ist nur der kürzere der beiden Großkreisbögen Kürzeste aber beide sind Geodätische.

- Man kann aber folgendes zeigen: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ Geodätische, so existiert für jedes s_0 in $[a,b]$ eine Umgebung I von s_0 in $[a,b]$, für die gilt, dass für jedes $s_1 \in I$ $\gamma|_{[s_0,s_1]}$ Kürzeste ist.

Bemerkung. In jedem Punkt gibt es zu jeder Richtung genau eine Geodätische.

In jedem Punkt, der nicht Nabelpunkt ist, gibt es genau zwei Hauptkrümmungsrichtungen. durch jeden solchen Punkt gehen also genau zwei Krümmungslinien.

Beispiel 4.11 *Meridiankurven und Breitenkreise von Rotationsflächen sind Krümmungslinien.*

Für jeden Punkt p auf einer Fläche f gilt

- ist $K > 0$ (p ist elliptisch), so existieren keine reellen Asymptotenrichtungen.
- ist $K = 0$ und $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, so gibt es genau eine Asymptotenrichtung.
- ist $K = 0 = k_1 = k_2$, so ist jede Richtung Asymptotenrichtung.
- ist $K < 0$ (p ist hyperbolisch), so gibt es in p genau zwei Asymptotenrichtungen.

Durch jeden hyperbolischen Punkt gehen also genau zwei Asymptotenlinien.

4.8 Minimalflächen

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisches Flächenstück $B \subset U$ kompakt. Dann ist

$$A(f|_B) = \int_B \|f_x \times f_y\|$$

Wir betrachen jetzt eine Normalvariation von f. Für $\epsilon : U \times I \to \mathbb{R}$ sei

$$f^t(x,y) = f(x,y) + \epsilon(x,y,t)N(x,y)$$

Dann ist

$$\begin{array}{rclcl} f_x^t & = & f_x + \epsilon_x N + \epsilon N_x & = & (1+a\epsilon)f_x + c\epsilon f_y + \epsilon_x N \\ f_y^t & = & f_y + \epsilon_y N + \epsilon N_y & = & b\epsilon f_x + (1+d\epsilon) f_y + \epsilon_y N \end{array}$$

und

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}A(f^t|_B)|_0 &= \tfrac{d}{dt}\int_B \|f_x^t \times f_y^t\| \,|_0 \\
&= \int_B \frac{\left\langle \frac{d}{dt}(f_x^t \times f_y^t), f_x^t \times f_y^t \right\rangle}{\|f_x^t \times f_y^t\|} \,|_0 \\
&= \int_B \left\langle \tfrac{d}{dt}f_x^t \times f_y^t + f_x^t \times \tfrac{d}{dt}f_y^t), N \right\rangle \,|_0 \\
&= \int_B \epsilon_t (a+d)\|f_x \times f_y\| \,|_0 \\
&= -2\int_B \epsilon_t H \|f_x \times f_y\| \,|_0
\end{aligned}$$

Also misst H die Flächeninhaltsänderung unter Normalvariationen. Insbesondere muss also für eine Fläche mit minimalem Flächeninhalt $H = 0$ gelten.

Definition 4.31 *Eine reguläre Fläche mit mittlerer Krümmung $H = 0$ heißt* Minimalfläche*.*

Beispiel 4.12 *Die bereits bekannten Katenoid und Helikoid und die Enneperfläche aus den Übungen.*