Lemma 4.19 *h ist symmetrische Bilinearform*

Beweis. [und Definition] Seien e_1 und e_2 die Standardbasis in T_pU. Dann ist

- $l := h(e_1, e_1) = -\langle N_x, f_x\rangle = \langle N, f_{xx}\rangle$
- $m := h(e_1, e_2) = -\langle N_x, f_y\rangle = \langle N, f_{yx}\rangle = \langle N, f_{xy}\rangle = -\langle N_y, f_x\rangle = h(e_2, e_1)$
- $n := h(e_2, e_2) = -\langle N_y, f_y\rangle = \langle N, f_{yy}\rangle$

□

Lemma 4.20 *Die Darstellungsmatrix des Weingartenoperators A bezüglich der Standardbasis ist*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es gilt

$$v^T \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} w = h(v,w) = -g(Av,w) = -v^T A^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w.$$

Auflösen nach A liefert dann die Behauptung. □

Korollar 4.21 *Für die Gaußkrümmung gilt*

$$K = \det A = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

Beweis. Wir betrachten die schiefsymmetrische bilineare Abbildung $L(v,w) = \det(df(v), df(w), N)$. Offenbar ist ihre Darstellungsmatrix durch $L(v,w) = v^T \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} w$ gegeben, wobei $T = \sqrt{EG - F^2}$ ist. Jetzt hat man aber

$$\begin{aligned} \det(N_x, N_y, N) &= L(Ae_1, Ae_2) = e_1^T A^T \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} Ae_2 \\ &= (a,c) \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} \binom{b}{d} = \sqrt{EG - F^2}(ad - bc) \end{aligned}.$$

Damit und mit $A(f) = \sqrt{EG - F^2}$ ist dann aber $K = \frac{\det(N_x,N_y,N)}{\det(f_x,f_y,N)} = ad - bc$. □

Bemerkung. Für spätere Verwendung halten wir noch fest:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{EG-F^2}(mF - lG), & c &= \tfrac{1}{EG-F^2}(lF - mE), \\ b &= \tfrac{1}{EG-F^2}(nF - mG), & d &= \tfrac{1}{EG-F^2}(mF - nE). \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte einer Matrix, d. h. $K = \det A = k_1 k_2$ wenn die k_i die Eigenwerte von A sind.

Satz 4.22 (aus der linearen Algebra) *Sei V endlich dimensionaler Vektorraum, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ euklidisches Skalarprodukt und $A : V \to V$ selbstadjungierter Operator. Dann existiert in V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.*

Zu jedem $v \in T_pU$ betrachten wir jetzt

$$k(v) = \frac{h_p(v,v)}{g_p(v,v)}$$

$k(v)$ ist die Normalkrümmung, denn für jede Kurve γ in f durch $f(p) = \gamma(0)$, die in $f(p)$ $N(p)$ als Normale hat, gilt $\gamma''(0) = d_p^2 f(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{\gamma}'(0)) + d_p f(\tilde{\gamma}''(0))$ und damit

$$\langle \gamma''(0), N(p) \rangle = - \langle d_p f(\tilde{\gamma}'(0)), d_p N(\tilde{\gamma}'(0)) \rangle = h_p(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{\gamma}'(0)).$$

Betrachtet man $k(v)$ als Abbildung von S^1 so ist sie stetig auf einem Kompaktum, nimmt also Maximum und Minimum an.

Lemma 4.23 *In jedem Punkt sind Maximum und Minimum der Normalkrümmung das Negative der Eigenwerte des Weingartenoperators.*

Beweis. Der Weingartenoperator A_p ist selbstadjungiert bezüglich g_p. Seien (e_1, e_2) ON-Basis aus Eigenvektoren von A_p bezüglich g und k_1, k_2 die zugehörigen Eigenwerte. Dann kann man jedes $v \in T_pU$ mit $g_p(v,v) = 1$ als $v = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2$ für ein geeignetes α schreiben. Damit ist aber $k(v) = -(k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha)$ was eine Konvexkombination von $-k_1$ und $-k_2$ ist. Diese Beziehung heißt auch Eulerformel. □

Definition 4.24 *Die Negativen der Eigenwerte des Weingartenoperators heißen* Hauptkrümmungen *von f. Die zugehörigen Eigenrichtungen (b.z.w ihre Bilder unter f) heißen* Hauptkrümmungsrichtungen*.*

Das Produkt der Hauptkrümmungen ist die Gaußkrümmung

$$K = k_1 k_2 = \det A,$$

das arithmetische Mittel heißt mittlere Krümmung *von f*

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Spur} A.$$

Bemerkung. Man kann die mittlere Krümmung als normalisiertes Integral über die Normalkrümmungen erhalten:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_p(v,v)\, dt, \text{ wobei } v = \cos t e_1 + \sin t e_2.$$

4.6 Theorema Egregium: Gaußkrümmung II

Satz 4.25 (theorema egregium von Gauß) *Zwei isometrisch parametrisierte Flächenstücke haben dieselbe Gaußkrümmung.*

Anders ausgedrückt: Die Gaußkrümmung hängt nur von der ersten Fundamentalform ab. Der folgende Beweis ist nicht sonderlich instruktiv aber recht kurz.

Beweis. (Nicht in der Vorlesung). Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück. Zunächst schreiben wir die zweiten Ableitungen von f in f_x, f_y und N um dann aus der Vertauschbarkeit der dritten Ableitungen eine Formel für K ausschließlich in E, F und G und ihren Ableitungen herzuleiten.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\langle f_{xx}, f_x\rangle &=& \frac{1}{2}E_x, & \langle f_{xx}, f_y\rangle &=& F_x - \frac{1}{2}E_y, & \langle f_{xx}, N\rangle &=& l,\\
\langle f_{xy}, f_x\rangle &=& \frac{1}{2}E_y, & \langle f_{xy}, f_y\rangle &=& \frac{1}{2}G_x, & \langle f_{xy}, N\rangle &=& m,\\
\langle f_{yy}, f_x\rangle &=& F_y - \frac{1}{2}G_x, & \langle f_{yy}, f_y\rangle &=& \frac{1}{2}G_y, & \langle f_{yy}, N\rangle &=& n.
\end{array}$$

Für später halten wir noch fest: Die Koeffizienten Γ der zweiten Ableitungen bezüglich der ersten

$$\begin{array}{rclcrcl}
f_{xx} &=& \Gamma^1_{11}f_x + \Gamma^2_{11}f_y + lN, & & f_{yy} &=& \Gamma^1_{22}f_x + \Gamma^2_{22}f_y + nN\\
f_{xy} &=& \Gamma^1_{12}f_x + \Gamma^2_{12}f_y + mN &=& f_{yx} &=& \Gamma^1_{21}f_x + \Gamma^2_{21}f_y + mN
\end{array}$$

heißen *Christoffelsymbole*. Sie sind symmetrisch in den unteren Indices. Es ist klar, dass die Christoffelsymbole durch Ableitungen von E, Fund G auszudrücken sind. Nun hat man

$$\begin{array}{rcl}
(f_{xx})_y &=& \Gamma^1_{11y}f_x + \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{12}f_x + \Gamma^2_{12}f_y + lN)\\
&& +\Gamma^2_{11y}f_y + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{22}f_x + \Gamma^2_{2}f_y + nN) + l_yN + l(bf_x + df_y),
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(f_{xy})_x &=& \Gamma^1_{12x}f_x + \Gamma^1_{12}(\Gamma^1_{11}f_x + \Gamma^2_{11}f_y + lN)\\
&& +\Gamma^2_{12}f_y + \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{21}f_x + \Gamma^2_{21}f_y + lN) + m_xN + m(af_x + cf_y)
\end{array}$$

Hier sind a, b, c und d die Einträge der Darstellungsmatrix von A. betrachtet man jetzt den f_y-Anteil von $(f_{xx})_y = (f_{xy})_x$ so sieht man, das er bis auf zwei Terme nur Ableitungen von E, F und G enthält. Wir bringen sie auf eine Seite und haben:

$$\begin{array}{rcl}
\text{(etwas in Abl. von } E, F \text{ und } G) &=& ld - mc = ld - mb\\
&=& \frac{lmF - lnE - (lmF - m^2E)}{EG - F^2} = -\frac{E(ln - m^2)}{EG - F^2}\\
&=& -EK
\end{array}$$

Hier haben wir die vorher angegebenen Ausdrücke für die Einträge von A eingesetzt. Insgesammt (und da E nicht verschwinden kann) haben wir also die gesuchte Formel für die Gaußkrümmung K hergeleitet. □

Korollar 4.26 *Es gibt keine isometrische Parametrisierung der Sphäre.*

Definition 4.27 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück, $p \in U$ und k_1, k_2 und K Hauptkrümmungen und Gaußkrümmung von f in p. p heißt:*

- elliptischer Punkt *falls* $K(p) > 0$
- hyperbolischer Punkt *falls* $K(p) < 0$
- parabolischer Punkt *falls* $K(p) = 0$ *und* $k_1^2(p) + k_2^2(p) \neq 0$
- Flachpunkt *falls* $K(p) = k_1(p) = k_2(p) = 0$
- Nabelpunkt *falls* $k_1(p) = k_2(p)$

Bemerkung. In einem Nabelpunkt ist $H^2 - K = 0$.

4.7 Kurven auf Flächen

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bogenlängenparametrisierte Kurve auf $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$. Der Rahmen $F = (T, B, N \circ \tilde{\gamma})$ mit $T = \gamma'$, N der Normalen von f und $B = N \circ \tilde{\gamma} \times T$ heißt *Darboux-Rahmen* von γ. Es ist

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_N \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_N & -\tau_g & 0 \end{pmatrix}.$$

κ_g heißt *geodätische Krümmung*, κ_N *Normalkrümmung* und τ_g *geodätische Torsion*. Da $\kappa_N = -\langle T', N \rangle = h(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}')$ ist, ist das die Normalkrümmung $k(\tilde{\gamma}')$.

Definition 4.28 *Eine Kurve $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ auf einer Fläche f heißt*

- *Prägeodätische falls gilt*
  $\kappa_g = 0$ *($\Leftrightarrow T' \parallel N \Leftrightarrow B' \parallel N$) und Geodätische im Falle dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.*

- *Krümmungslinie falls gilt*
  $\tau_g = 0$ *($\Leftrightarrow N' \parallel T \Leftrightarrow B' \parallel T \Leftrightarrow \tilde{\gamma}'$ ist Eigenvektor zum Weingartenoperator)*

- *Asymptotenlinie falls gilt*
  $\kappa_N = 0$ *($\Leftrightarrow T' \parallel B \Leftrightarrow N' \parallel B \Leftrightarrow \tilde{\gamma}'$ ist isotroper Vektor des Weingartenoperators)*