Satz 4.14 *Seien $f : U \to \mathbb{R}^3$ und $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ zwei äquivalente Parametrisierungen. Dann ist $A(f) = A(\tilde{f})$.*

Beweis. $f \cong \tilde{f}$ bedeutet es gibt einen Diffeomorphismus $\phi : \tilde{U} \to U$ mit $\tilde{f} = f \circ \phi$. Nach dem Transformationssatz aus der Analysis ist dann aber

$$\begin{aligned}
\int_U \det(f_x, f_y, N)\, dxdy &= \int_{\tilde{U}} \det(f_x, f_y, N)|_\phi| \det d\phi| \\
&= \int_{\tilde{U}} \det \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & N_1 \\ f_{2x} & f_{2y} & N_2 \\ f_{3x} & f_{3y} & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} & 0 \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \\
&= \int_{\tilde{U}} \det(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y, \epsilon N)
\end{aligned}$$

mit $\epsilon = \operatorname{sign}\det(d\phi)$. □

Beispiel 4.7 *Lamberts zylindrische Projektion $f : [0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (\cos(x)\sqrt{1 - y^2}, \sin(x)\sqrt{1 - y^2}, y)$ ist flächentreu.*

Beispiel 4.8 *Katenoid und (umparametrisiertes) Helikoid haben dieselbe Gaußabbildung (siehe Übung): Für das Katenoid gilt*

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= (\cosh x \cos y, \cosh x \sin y, x) \\
f_x(x, y) &= (\sinh x \cos y, \sinh x \sin y, 1) \\
f_y(x, y) &= (-\cosh x \sin y, \cosh x \cos y, 0) \\
f_x \times f_y &= (-\cosh x \cos y, -\cosh x \sin y, \cosh x \sinh x) \\
\|f_x \times f_y\| &= \cosh^2 x \\
N(x, y) &= \tfrac{1}{\cosh x}(-\cos y, -\sin y, \sinh x)
\end{aligned}$$

Das Helikoid reparametrisieren wir wie folgt: $x \to \sinh x$, $y \to y - \pi/2$ und erhalten

$$\begin{aligned}
h(x, y) &= (\sinh x \sin y, -\sinh x \cos y, y - \pi/2) \\
h_x(x, y) &= (\cosh x \sin y, -\cosh x \cos y, 0) \\
h_y(x, y) &= (\sinh x \cos y, \sinh x \sin y, 1) \\
h_x \times h_y &= f_x \times f_y
\end{aligned}$$

Woraus die Behauptung folgt. Es gilt sogar, das die beiden Flächen dieselbe 1. Fundamentalform besitzen:

$$E = \cosh^2 x, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 .$$

Man nennt zwei Flächen für die das gilt isometrisch *zueinander.*

4.4 Krümmung: Gaußkrümmung I

Definition 4.15 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück. Dann heißt*

$$K(p) = \frac{\det(N_x, N_y, N)}{\det(f_x, f_y, N)}$$

Gaußkrümmung *von f in p.*

Offenbar erhält man $K(p)$ als Limes des Quotienten der Flächeninhalte von f und seiner Gaußabbildung:

$$K(p) = \lim_{r \searrow 0} \frac{A(N|_{D_r(p)})}{A(f|_{D_r(p)})}.$$

$D_r(p)$ bezeiche hier die Kreisscheibe um p mit Radius r in U.

Beispiel 4.9

- *$f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ hat $K = 0$, da N konstant ist*
- *$f : U \to rS^2 \subset \mathbb{R}^3$ hat $K = \frac{1}{r^2}$, da $f = \frac{1}{r}N$ ist.*
- *Für das Katenoid gilt*

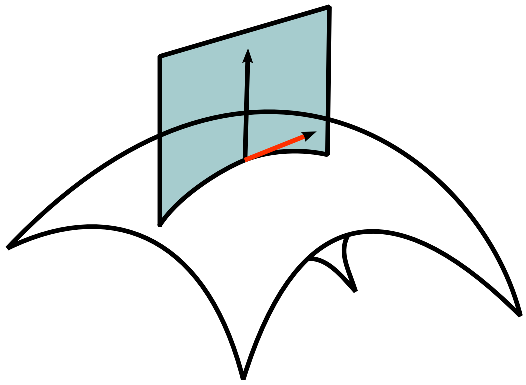
$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{\cosh^2 x}(-\cos y \sinh x, \sin y \sinh x, 1) \\ N_y &= \frac{1}{\cosh x}(\sin y, -\cos y, 0) \\ \det(N_x, N_y, N) &= \frac{-1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

und also $K(x, y) = \frac{-1}{\cosh^4 x}$. Da Katenoid und Helikoid dieselbe Gaußabbildung und erste Fundamentalform haben, muss das Helikoid auch dieselbe Gaußkrümmung besitzen.[4]

4.5 Normalkrümmung und Weingartenoperator

Wir setzen unsere Krümmungsuntersuchungen fort. Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück. Dann existiert für $p \in U$ eine Umgebung $V \subset U$, so das $f(V)$ eingebettete Fläche ist. Sei nun $v \in T_pV$. Dann spannen $N(p)$ und $d_pf(v)$ eine Ebene durch $f(p)$ auf, die f (zumindest lokal) transversal schneidet. Der Schnitt von f mit dieser Ebene definiert (wieder lokal) eine glatte ebene Kurve γ (Übung). Ohne Einschränkung sei γ bogenlängenparametrisiert und es gelte $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(0) = f(p)$. Dann ist $\gamma'(0) \in T_pf$ und $N(p)$ ist parallel zu $\gamma''(0)$.

[4] Wir werden später sehen das es genügt, das zwei Flächen isometrisch zueinander sind (also dieselbe erste Fundamentalform haben) um zu schließen, das ihre Gaußkrümmungen übereinstimmen



Definition 4.16 *Zu einer gegebenen Richtung $v \in T_pV$ heißt die Krümmung $k(v)$ der Schnittkurve wie oben Normalkrümmung von f in p in Richtung v.*[5]

Wir werden jetzt $\kappa(v)$ durch Untersuchung von d_pN bestimmen.

Dazu beobachten wir zunächst, das aus $dN(v) \perp N$ folgt, das es zu jedem $v \in T_pU$ ein $w \in T_pU$ geben muss, so das $d_pN(v) = d_pf(w)$ gilt. Die Beziehung zwischen v und w ist offenbar linear:

Definition 4.17 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück. Die lineare Abbildung $A_p : T_pU \to T_pU$, definiert durch $d_pN(v) = d_pf(A_pv)$ für alle $v \in T_pU$ heißt* Weingartenoperator *von f in p.*

Definition 4.18 *Die* Zweite Fundamentalform *ordnet jedem Punkt die Bilinearform $h_p : T_pU \times T_pU \to \mathbb{R}$*

$$h_p(v, w) := -\langle d_pN(v), d_pf(w)\rangle = \left\langle N(p), d_p^2f(v, w)\right\rangle = -g(Av, w).$$

zu.

Bemerkung. $h_p(v, w)$ misst den w-Anteil der Änderung von N in v-Richtung.

[5]Man muss hier eigentlich noch die Orientierung der Ebene festlegen. Das machen wir erst später.