Beispiel 3.3 *Für die Helix* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b \neq 0$ *ist das folgende* F *ein Rahmen:*

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\sin t & -\cos t & \frac{b}{c}\sin t \\ \frac{a}{c}\cos t & -\sin t & -\frac{b}{c}\cos t \\ \frac{b}{c} & 0 & \frac{a}{c} \end{pmatrix}$$

mit $c = |\dot\gamma(t)|$. *Die Ableitungsmatrix ist gegeben durch:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{c^2} & 0 \\ \frac{a}{c^2} & 0 & -\frac{b}{c^2} \\ 0 & \frac{b}{c^2} & 0 \end{pmatrix}$$

denn

$$F' = c\dot F = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\cos t & \sin t & \frac{b}{c}\cos t \\ -\frac{a}{c}\sin t & -\cos t & \frac{b}{c}\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 3.4 (Hauptsatz) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *offenes Intervall und* $A : I \to so(n)$ *glatt. Dann existiert eine bis auf euklidische Bewegungen eindeutige bogenlängenparametrisierte gerahmte Kurve* $(\gamma, F) : I \to \mathbb{R}^n \times SO(n)$ *mit* $F' = FA$.

Zum Beweis benötigen wir noch einige Lemmata:

Satz 3.5 (Spezialfall von Picard-Lindelöf) *Sei* $A : [a,b] \to gl(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ *differenzierbar,* $t_0 \in [a,b]$, $F_0 \in gl(n)$. *Dann existiert eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung* $F : [a,b] \to gl(n)$ *mit* $F(t_0) = F_0$ *und* $F' = FA$.

Was wir noch zeigen müssen ist, das falls $A : [a,b] \to so(n)$ so ist $F : [a,b] \to SO(n)$.

Lemma 3.6 *Ist* $A : [a,b] \to sl(n)$ *differenzierbar,* $t_0 \in [a,b]$, $F_0 \in SL(n)$ *und* $F : [a,b] \to gl(n)$ *mit* $F(t_0) = F_0$ *und* $F' = FA$, *so ist* $F : [a,b] \to SL(n)$.

Beweis. Für F wie in den Voraussetzungen gilt $(\det F)' = \det F \,\mathrm{Spur}\, A = 0$. Also ist $\det F = const = \det F_0 = 1$. □

Lemma 3.7 *Ist* $A : [a,b] \to so(n)$ *differenzierbar,* $t_0 \in [a,b]$, $F_0 \in O(n)$ *und* $F : [a,b] \to gl(n)$ *mit* $F(t_0) = F_0$ *und* $F' = FA$, *so ist* $F : [a,b] \to O(n)$.

Beweis. $(FF^T)' = F'F^T + FF'^T = FAF^T + FA^TF^T = F(A + A^T)F^T = 0$. Also ist $FF^T = const = F_0F_0^T = Id$. □

Zusammen folgt

Lemma 3.8 *Ist $A : [a,b] \to so(n)$ differenzierbar, $t_0 \in [a,b]$, $F_0 \in SO(n)$ und $F : [a,b] \to gl(n)$ mit $F(t_0) = F_0$ und $F' = FA$, so ist $F : [a,b] \to SO(n)$.*

Beweis. [vom Hauptsatz] Sei $A : [a,b] \to so(n)$ differenzierbar, $t_0 \in [a,b]$, $F_0 \in SO(n)$ dann existiert für jedes $[a,b] \subset I$ mit $t_0 \in [a,b]$ ein eindeutiges $F : [a,b] \to SO(n)$ mit $F(t_0) = F_0$ und $F' = FA$. Ausschöpfen von I liefert dann $F : I \to SO(n)$. Setzt man weiter $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ durch $\gamma(s) = \int_{t_0}^{s} F_1(t)\, dt$ dann ist (γ, F) die gesuchte gerahmte Kurve.

Sei nun $(\tilde{\gamma}, \tilde{F})$ eine weitere Lösung. Dann folgt aus $(F\tilde{F}^{-1})' = F(A - \tilde{F}^{-1}\tilde{F}A)\tilde{F}^{-1} = 0$ das $F\tilde{F}^{-1} \cong B \in SO(n)$ konstant ist. Weiter ist nun $(\gamma - B\tilde{\gamma})' = \gamma' - F\tilde{F}^{-1}\tilde{\gamma}' = F_1 - Fe_1 = 0$. Also ist $\gamma = B\tilde{\gamma} - c$ für ein $c \in \mathbb{R}^n$. □

Bemerkung. Sind F und $\tilde{F}$ zwei Rahmen ein und derselben Kurve γ, so unterscheiden sie sich um eine Drehung $B = F^{-1}\tilde{F}$, die γ' fix lässt.

3.1 Spezielle Rahmen im $\mathbb{R}^3$

Die Ableitungsmatrix für einen Rahmen F im $\mathbb{R}^3$ hat die allgemeine Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\tau \\ \kappa_2 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

und τ heißt die Torsion des Rahmens.

3.1.1 Frenetrahmen

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bogenlangenparametrisierte Kurve. Ein Rahmen mit $\kappa_2 = 0$ heißt *Frenetrahmen.* Ist $|\gamma(s)''| \neq 0$ für alle $s \in I$, so ist $\left(\gamma', \frac{\gamma''}{|\gamma''|}, \gamma' \times \frac{\gamma''}{|\gamma''|}\right) = (T, N, B)$ ein Frenetrahmen von γ.

Beispiel 3.4 *Der vorher gegebene Rahmen der Helix ist ein Frenetrahmen.*

Bemerkung. Nicht jede Kurve hat einen Frenetrahmen:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t}}), & t > 0 \\ (0,0,0), & t = 0 \\ (t, e^{\frac{1}{t}}, 0), & t < 0 \end{cases}.$$

Bemerkung. Sind alle Komponenten von γ reell analytisch (d. h. man kann γ als Potenzreihe entwickeln), so besitzt γ einen Frenetrahmen.

Bemerkung. Ist γ bogenlängenparametrisiert, so kann man die Krümmung $\kappa = \kappa_1$ und Torsion wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3} \\ \tau &= \frac{\det(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, das die Krümmung, anders als im eben Fall, nicht mehr vorzeichenbehaftet, sondern immer nicht-negativ ist. Die Torsion kann das Vorzeichen wechseln.

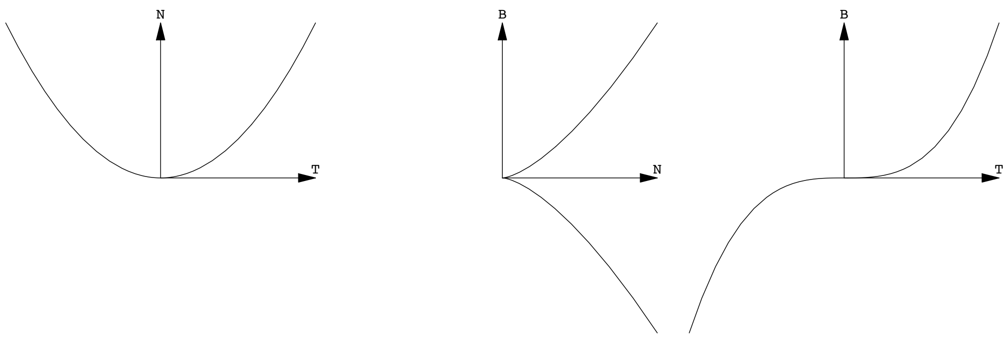
Definition 3.9 *Sei γ Kurve mit Frenetrahmen (T, N, B). B wird auch* Binormale *genannt und*

- $\gamma(s) + \mathbb{R}T(s) + \mathbb{R}N(s)$ *heißt Schmiegebene von γ*
- $\gamma(s) + \mathbb{R}N(s) + \mathbb{R}B(s)$ *heißt Normalebene von γ*
- $\gamma(s) + \mathbb{R}T(s) + \mathbb{R}B(s)$ *heißt rektifizierende Ebene von γ*

Wir betrachten jetzt das lokale verhalten der Projektionen von γ auf die drei obigen Ebenen. Dazu entwickeln wir γ als Potenzreihe (ohne Einschränkung in der Stelle $s_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(0) + sT(0) + \tfrac{s^2}{2}\kappa(0)N(0) + \tfrac{s^3}{6}\left(\kappa'(0)N(0) - \kappa^2(0)T(0)\right. \\ &\quad \left. +\kappa(0)\tau(0)B(0)\right) + \dots \\ &= \gamma(0) + \left(s - \tfrac{s^3\kappa(0)}{6}\right)T(0) + \left(\tfrac{s^2\kappa(0)}{2} + \tfrac{s^3\kappa'(0)}{6}\right)N(0) \\ &\quad + \tfrac{s^3\kappa(0)\tau(0)}{6}B(0) + \dots \end{aligned}$$

Trägt man die Terme niedrigster Ordnung in s in den Faktoren vor T, N und B gegeneinander ab erhält man generisch



3.1.2 Normalenbündel, Paralleltransport und parallele Rahmen

Definition 3.10 *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve.*

- $N\gamma = \{(p, v) \mid p \in I, v \perp \gamma'(p)\}$ *heißt Normalenbündel von* γ.
- *Ein Vektorfeld* $V : I \to \mathbb{R}^n$ *heißt Normalenvektorfeld, falls* $(s, V(s)) \in N\gamma$.
- *Ein Normalenvektorfeld* V *heißt parallel (im Normalenbündel) falls* $V'(s) \parallel \gamma'(s)$ *für alle* $s \in I$ *(d. h. die Projektion von* V' *auf das Normalenbündel verschwindet).*

Bemerkung. Die Idee hier ist die folgende: verschiebt man einen Vektor parallel im $\mathbb{R}^n$, so verschwindet seine Ableitung. Verschiebt man einen Vektor parallel im Normalenbündel, so verschwindet seine Ableitung im Normalenbündel (also der Anteil der Ableitung, der im Normalenbündel liegt).

Lemma 3.11 *Seien* V, W *parallele Normalenvektorfelder. Dann ist* $\langle V, W\rangle$ *konstant.*

Beweis. $\frac{d}{ds}\langle V, W\rangle = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0.$ □

Korollar 3.12 *Parallele Normalenvektorfelder haben konstante Länge.*

Lemma 3.13 *Sei* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *regulär,* $t_0 \in I$, $V_0 \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\langle V_0, \gamma'(t_0)\rangle = 0$. *Dann existiert genau ein paralleles Normalenvektorfeld* $V : I \to \mathbb{R}^n$ *mit* $V(t_0) = V_0$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Lemma davor. Für die Existenz setzt man $W'(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$ an. Ableiten der Bedingung $\langle W(s), \gamma'(s)\rangle = 0$ liefert dann $\lambda(s) = -\langle W(s), \gamma''(s)\rangle$. Die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Differentialgleichung folgt wieder aus dem Satz 3.5. □

Definition 3.14 *Sei* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *regulär. Der Rahmen* $F : I \to SO(n)$ $F = (\gamma', N_1, \ldots, N_{n-1})$ *heißt* parallel, *falls alle* N_i *parallele Normalenvektorfelder sind.*

Beispiel 3.5 *Jeder Rahmen in* $\mathbb{R}^2$ *ist parallel.*

Die Ableitungsmatrix eines parallelen Rahmens ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & \dots & -\kappa_{n-1} \\ \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \kappa_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Im Falle $\mathbb{R}^3$ ist die Torsion $\tau \equiv 0$ und man definiert die komplexe Krümmung einer Kurve bezüglich eines parallelen Rahmens durch

$$\Psi = \kappa_1 + i\kappa_2.$$

Ψ ist damit nur bis auf einen unitären Faktor bestimmt.

Man kann beispielsweise zeigen, das eine Kurve genau dann in einer Sphäre enthalten ist, wenn ihre komplexe Krümmung in einer (reellen) Graden liegt.

Der Zusammenhang zwischen komplexer Krümmung und Krümmung und Torsion des Frenetrahmens wir in der Übung behandelt.