2.7 Vier-Scheitel-Satz

Mit Ausnahme des Hauptsatzes, waren alle unsere bisherigen Betrachtungen ebener Kurven lokaler Natur. Jetzt wollen wir wenigstens einen prominenten Satz aus der globalen Kurventheorie betrachten. Es geht jetzt also nicht mehr um Eigenschaften einer Kurve in der Umgebung eines Punktes, sondern um Aussagen, die wir über die Kurve als ganzes treffen können.

Zunächst benötigen wir aber noch zwei Begriffe.

Definition 2.20 *Eine periodische Kurve* γ *mit Periode* $p > 0$ *heißt* einfach geschlossen, *falls* $\gamma(t) \neq \gamma(t + x)$ *für alle* $x \in]0, p[$ *und* $t \in \mathbb{R}$.

Definition 2.21 *Eine einfach geschlossene reguläre Kurve* γ *mit Periode* p *heißt* konvex, *wenn für alle* $t_1, t_2 \in [0, p]$, $t_1 \leq t_2$ *gilt:*
$T(t_1) = T(t_2)$ *impliziert* T *ist konstant auf* $[t_1, t_2]$ *oder auf* $[t_2, p + t_1]$.

Satz 2.22 (Vier-Scheitel-Satz) *Eine einfach geschlossene reguläre Kurve (mit Periode p) in der Ebene hat mindestens vier Scheitel (auf ihrem Periodizitätsbereich* $]0, p]$*).*

Wir werden diesen Satz hier nur unter der Zusatzannahme der Konvexität der Kurve beweisen:
Beweis. (konvexer Fall) Wir schreiben $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. Ist κ konstant, so verschwindet seine Ableitung dort und wir haben unendlich viele Scheitel. Wir nehmen also an $/kappa$ sei nicht konstant. Als stetige Funktion nimmt es auf $[0, p]$ Maximum und Minimum an. κ habe also ein Minimum in s_0 und ein Maximum in s_1. Ohne Einschränkung können wir zusätzlich $s_0 = 0$ annehmen. κ' nimmt jetzt auf $[0, s_1]$ positive und auf $[t_1, p]$ negative Werte an. Wechselt das Vorzeichen in einem der beiden Intervalle ein weiteres Mal, so muss es das sogar zwei mal tun und κ' hat vier Nullstellen, κ also vier Scheitel. Wir nehmen also an, das κ' das Vorzeichen auf den beiden Intervallen nicht ändert, also $\kappa'|_{[0,s_1]} \geq 0$ und $\kappa'|_{[s_1,p]} \leq 0$ gilt. Wir können weiter annehmen, das $\gamma(0) = 0$ und $y(s_1) = 0$ ist.

Wechselt nun y auf $[0, s_1]$ (bzw. auf $[s_1, p]$) das Vorzeichen, so ist y an mindestens 3 Stellen 0 und nach Satz von Rolle gibt es 3 Stellen, an denen y' verschwindet. Dort hat γ einen zur x-Achse parallelen Einheitstangentialvektor T. Zwei von den drei parallelen Vektoren müssen dann aber gleich sein und da γ konvex ist, ist T dann auf einem ganzen Intervall konstant; also auch κ und wir haben wieder unendlich viele Scheitel.

Wir nehmen also an, das y auf beiden Intervallen das Vorzeichen nicht wechselt. Ist es gleich, so hat y in 0 und p lokale Extrema (also verschwindende Ableitung) und zusammen mit dem Satz von Rolle erhalten wir wieder vier

Punkte an denen die Tangente von γ parallel zur x-Achse ist. Wieder liefert die Konvexität von γ unendlich viele Scheitel.

Wir nehmen also an, das y genau wie κ' nur genau in 0 und p das Vorzeichen wechselt. Dann wechselt aber $y(s)\kappa(s)$ nirgends das Vorzeichen. Es gilt aber

$$\gamma''(s) = (x(s), y(s))'' = \kappa(-y'(s), x'(s)) = \kappa(s)J\gamma'(s)$$

und also $x''(s) = -\kappa(s)y(s)$. Damit ist

$$\int_0^p y(s)\kappa(s)\, ds = (y(s)\kappa(s))|_0^p - \int_0^p y'(s)\kappa(s)\, ds = \int_0^p x''(s)\, ds = x'(s)|_0^p = 0.$$

Da der Integrand links das Vorzeichen nicht wechselt muss er identisch verschwinden. Also gilt $\kappa' \cong 0$. Widerspruch. □

Bemerkung. Da die Krümmung eine stetige Funktion ist, kann eine ebene Kurve nicht weniger als zwei Scheitel haben.

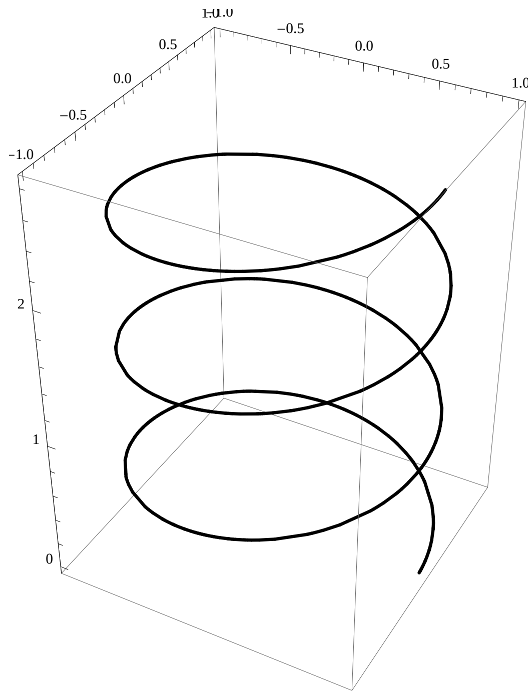
3 Raumkurven

Die folgenden Begriffe kann man direkt aus der Theorie der ebenen Kurven übernehmen:

- Kurve: $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

- Regularität, Bogenlängenparametrisierung, Länge $L(\gamma)$, Tangente und Einheitstangentialvektor T.

Beispiel 3.1 *Die Kurve* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ *heißt Helix.*



Für ebene Kurven hatten wir die Normale als $N = JT = J\gamma'$ eingeführt und Krümmung durch $\gamma'' = \kappa J\gamma'$ erklärt. Das geht im R^n, $n > 2$ nicht mehr. Was man aber verallgemeinern kann ist die Tatsache, das (T, N) Orthonormalbasis vom R^2 ist. Im folgenden werden wir die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ mit e_k, $k = 1, \ldots, n$ bezeichnen.

Definition 3.1 *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve mit Einheitstangentialvektor $T = \frac{d}{ds}\gamma$.*

- *Ein (orthonormaler) Rahmen ist eine C^∞-Abbildung $F : I \to SO(n)$ mit $Fe_1 = T$.*
- *Das Paar (γ, F) heißt gerahmte Kurve.*
- *Die Matrix A gegeben durch $\frac{d}{ds}F = F' = FA$ heißt Ableitungsmatrix von F.*

Wir werden jetzt einige Eigenschaften von A herleiten. Sei $F = (F_1, \ldots, F_n)$ Rahmen von $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{ds}F_i = FAe_i = \sum a_{ji}\ F_j.$$

Die Einträge von A sind also die Koeffizienten der Darstellung von F_i' bezüglich der F_j.

Wir betrachten jetzt zu $s_o \in I$ $\Gamma(s) = F^{-1}(s_0)F(s)$. Γ ist Kurve in $\mathbb{R}^{n^2}$ durch Id bei s_0. Nun folgt aus $\det(\Gamma(s)) \equiv 1$

$$0 = \frac{d}{ds}\det(\Gamma)|_{s_0} = \sum \det(e_1, \ldots, \frac{d}{ds}\Gamma_i, \ldots, e_n) = \operatorname{Spur} A(s_0)$$

und genauso impliziert $\Gamma\Gamma^T = Id$

$$0 = \frac{d}{ds}\Gamma\Gamma^T + \Gamma\frac{d}{ds}\Gamma^T = A + A^T.$$

Also ist A schiefsymmetrisch. Allgemeiner hat man

Lemma 3.2 *Gilt $F' = FA$ so folgt* $(\det F)' = \det F \operatorname{Spur} A$.

Beweis.
$(\det F)' = \sum \det(F_1, \ldots, F_i', \ldots, F_n) = \sum \det(F_1, \ldots, \sum_k a_{ki}F_i, \ldots, F_n) = \sum \det(F_1, \ldots, a_{ii}F_i, \ldots, F_n) = \det F \operatorname{Spur} A.$ □

Definition 3.3 *Wir definieren die Matrixalgebren $so(n) := \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ und $sl(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$.*

Beispiel 3.2 *Im Fall von $\mathbb{R}^2$ gibt es keine Wahl: Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ regulär. Dann ist $F = (T, N)$ Rahmen und es gilt*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$